Suma dels termes d'una progressió geomètrica

Sigui una progressió geomètrica:

$$\begin{aligned}
a_0 &= a \\
a_1 &= a \cdot r \\
a_2 &= a \cdot r^2 \\
a_3 &= a \cdot r^3 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Volem trobar una fórmula que permeti calcular ràpidament la suma dels primers $n+1$ elements (és a dir, fins a a_n):

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

Per trobar-ho, procedim de la manera següent:

$$\begin{aligned}
r \cdot S_n &= r \cdot (a_0 + \ldots + a_n) && \text{Aplicam la propietat distributiva} \\
&= r \cdot a_0 + \ldots + r \cdot a_n && \text{Com que } a_{i+1} = a_i \cdot r \\
&= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} && \text{Aplicam la definició de } S_n \\
&= S_n + a_{n+1} - a_0
\end{aligned}$$

Per tant, aïllant i treient factor comú, obtenim que

$$(r-1)S_n = a_{n+1} - a_0,$$

amb el que, aplicant la definició de a_{n+1} i a_0,

$$S_n = \frac{a \cdot r^{n+1} - a}{r-1}$$

Exemple 1. Si tenim la progressió geomètrica de raó $r = 2$ i terme inicial $a_1 = 5$, la suma dels primers 11 termes d'aquesta progressió $S_{10} = 5+5\cdot 2+5\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\ldots+5\cdot 2^{10}$ és igual a $(5 \cdot 2^{11} - 5)/(2-1) = 10235$.