

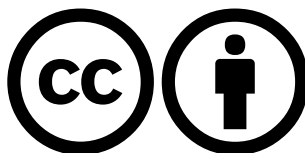
Exercicis i alguns apunts teòrics de Matemàtiques per les classes d'ESPA

NIVELL ESPA 3

Xavier Bordoy

Xavier Bordoy
Professor de Matemàtiques
Centre actual: CEPA Sud (Campos, Illes Balears)
Correu electrònic: somenxavier@gmail.com

© 2018 Xavier Bordoy. Excepte quan s'indiqui el contrari, aquesta obra està subjecta a la llicència “Reconeixement 4.0 Internacional de Creative Commons” (CC-BY 4.0). Això vol dir, *essencialment*, que podeu copiar, modificar i distribuir qualsevol part de l’obra com vulgueu, sempre que en citeu la font de manera explícita, d’acord amb els termes de la llicència. Per veure una còpia de la llicència, visiteu <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.



Mathematics Subject Classification (2010): 97-01, 97A10

Aquest document està pensat per fer classes d’Educació Secundària de Persones Adultes (ESPA) de les Illes Balears amb el currículum establert l’any 2009 ([entrada 17698 del BOIB 117 de 11 d’agost de 2009](#)) amb una metodologia magistral o que impliqui, eventualment, una reiteració d’exercicis rutinaris o l’aplicació de tècniques de resolució de problemes específiques.

El document ha estat mecanografiat. Encara que s’hagi revisat diverses vegades és possible que hi hagi errors — el més probable de tipus tipogràfic o gramatical. Si en detecteu algun, si us plau, aviseu-me per correu electrònic. D’altra banda, si adapteu o modifiqueu aquesta obra i considereu que el canvi ha estat per millorar-la, us agrairia que m’ho comunicués i, si el canvi és del meu gust, l’incorporaré a l’obra original en els mateixos termes de la llicència.

Aquest document ha estat generat, dimarts 14 agost 2018 a les 16:06, usant el programari [CON-T_EX_T](#) (versió 20180404 MKIV), [luatex](#) (versió 1.07) i [TikZ](#) sota un entorn [Linux](#).

La informació obtinguda en aquest document pot no ser suficientment precisa. En aquest sentit, l’autor no assumeix cap responsabilitat ni obligació legal per cap error o omissió que pugui haver fet.

Índex de continguts

Materials aliens	iii
Continguts oficials	iv
1 Conjunts numèrics i càlcul	5
1.1 Potències d'un nombre sencer	5
1.1.1 Càlcul de potències	5
1.1.2 Signe d'una potència	7
1.1.3 Potències d'exponent negatiu	7
1.2 Propietats de les potències	12
1.3 Potències de base 10. Notació científica	17
2 Àlgebra	22
2.1 Llenguatge algebraic	22
2.1.1 Llenguatge formal i llenguatge literari	22
2.1.2 Identitats i equacions	25
2.2 Equacions	27
2.2.1 Equacions senzilles i amb parèntesi	27
2.2.2 Comprovació	32
2.2.3 Equacions amb denominadors	35
2.2.4 Problemes	40
3 Funcions	56
3.1 Representació gràfica	56
3.1.1 Pla cartesià	56
3.1.2 Representació de funcions	57
3.2 Modelització	61
3.2.1 Funcions lineals	61
3.2.2 Funcions afins	63
3.2.3 Comparativa de productes	66

4	Estadística descriptiva	71
4.1	Introducció a l'Estadística	71
4.2	Població i mostra	73
4.2.1	Població i mostra	73
4.2.2	Tipus de variables estadístiques	76
4.2.3	Recompte de dades	78
	Taula de freqüències	78
	Cas discret	79
	Cas discret amb <i>moltes</i> dades	80
	Cas continu	82
4.3	Paràmetres estadístics	87
	Tipus de paràmetres estadístics	87
4.3.2	Paràmetres de centralització	94
4.3.3	Paràmetres de dispersió	101
4.3.4	Paràmetres de centralització i dispersió	106
4.4	Gràfics estadístics	111
	Diagrama de barres	111
	Diagrama de sectors	115
	Histograma	118

Materials aliens

Els continguts següents no són propis i, per tant, es distribueixen amb les seves corresponents llicències i autories:

- L'exercici 17 està fortament inspirat en la reflexió de n'Ewan Weinberg. "An Easy Transformation". © 2015 Ewan Weinberg. Disponible a <http://evanweinberg.com/2015/10/16/an-easy-transformation/>.
- L'exercici 94 està inspirat en "A12 Fencing" de MathShell, disponible a <http://map.mathshell.org/materials/tasks.php?taskid=369>. © 2012 The MAP Summative Assessment Tasks. El material està disponible sota llicència "Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada 3.0 No adaptada" (CC-BY-NC-ND 3.0).
- L'exercici 229 està extret de l'entrada "Real-World Math That Isn't Real To Students" del blog d'en Dan Meyer, disponible a <http://blog.mrmeyer.com/2013/real-world-math-that-isnt-real-to-students/>. © Dan Meyer. El material es distribuïa sota la llicència "Reconeixement 3.0 Estats Units d'Amèrica" (CC BY 3.0 US). Ara es distribueix sota la llicència "Reconeixement 4.0 Internacional" (CC-BY 4.0).
- L'exercici 234 està extret de l'exercici 12 del tema "Funciones y gráficas" del llibre "Llibre de text de 3r d'ESO" (pàgina 227). Editorial Anaya que es pot consultar a la pàgina del [departament de Matemàtiques de l'IES Arroyo](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/matematicas.htm), disponible a <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/matematicas.htm>. © Anaya.

L'ús dels materials aliens que mantenen tots els drets de d'autor es realitza acollint-se al dret de cita i ressenya per a fins docents amparat per l'article 32.2 de la Llei de Propietat Intel·lectual (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 d'abril de 1996. [Entrada 8930](#) del BOE 97, de 22 d'abril de 1996).

Continguts oficials

Els següents punts són els continguts oficials que s'han d'impartir en els diversos temes que conformen el temari del nivell d'ESPA 3 ([BOIB 117 de 11 d'agost de 2009](#)). La classificació és meva.

Conjunts numèrics i càlcul

Àlgebra

Representació gràfica

Estadística

1 Conjunts numèrics i càlcul

1.1 Potències d'un nombre sencer

1.1.1 Càlcul de potències

Exercici 1. Calculeu les potències següents:

- | | | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------|---------------------------------|
| a. 5^3 | d. $\left(\frac{-8}{12}\right)^3$ | g. $(-10)^7$ | j. $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ |
| b. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ | e. $(-3)^5$ | h. $0, 2^3$ | k. 22^1 |
| c. 254^0 | f. $(-50)^5$ | i. $(-0, 22)^4$ | l. 22^0 |

Exercici 2. Es poden descompondre els nombres següents en forma potencial? En cas afirmatiu, trobeu les seves descomposicions en forma de potència:

- | | | |
|-------|--------|---------|
| a. 64 | c. 81 | e. 576 |
| b. 16 | d. 420 | f. 1296 |

Exercici 3. Digueu quines de les expressions següents són iguals:

- A. (a.) 2^3 (b.) -2^3 (c.) $(-2)^3$ (d.) $-(-2)^3$
- B. (a.) 3^0 (b.) -3^4 (c.) $(-3)^4$ (d.) $-(-3)^0$ (e.) $(-3)^0$
- C. (a.) 9^3 (b.) 3^9 (c.) $(-3)^3$ (d.) $-(-3)^3$ (e.) $-(-9)^3$

Exercici 4. Expresseu en forma de potència:

a. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$

b. $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$

c. $(2 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot (2 \cdot a)$

d. $3 \cdot b \cdot 3 \cdot b \cdot 3$

e. 16

f. 100000

Exercici 5. Calculeu les potències següents i digueu quantes operacions feu:

a. 4^3

c. 2^3

b. 5^6

d. 10^6

1.1.2 Signe d'una potència

Exercici 6. Ordeneu de menor a major els nombres següents: (a.) -2^3 (b.) 2^3 (c.) 3^2 (d.) -3^2 (e.) $(-3)^2$

Exercici 7. Esbrineu el signe de les potències següents:

- | | | |
|--------------------------|----------------------|------------------------|
| a. $(-7)^3$ | d. $(-0.9)^4$ | g. $(-6)^0$ |
| b. $(-12)^5$ | e. $(-\pi)^4$ | h. $(\frac{-4}{12})^3$ |
| c. $(\frac{2}{-5})^{20}$ | f. $(-16 \cdot 5)^5$ | i. a^{10} |

Exercici 8. Ordeneu de menor a major les expressions següents, utilitzant els símbols $<$ i $=$ segons convengui

- A. (a.) 10^4 (b.) -10^4 (c.) 10^0 (d.) $0,1^{10}$
- B. (a.) $(\frac{1}{2})^2$ (b.) $(\frac{-3}{4})^4$ (c.) $(\frac{-4}{-6})^2$ (d.) 5^1 (e.) $\frac{2^2}{3}$
- C. (a.) 3^2 (b.) $(-5)^2$ (c.) -5^2 (d.) $(-3)^3$ (e.) $(\frac{1}{3})^3$

1.1.3 Potències d'exponent negatiu

Exercici 9. Calculeu:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a. 2^{-3} | e. 5^{-4} | i. 100^{-2} |
| b. $(\frac{2}{3})^{-3}$ | f. $(\frac{2}{5})^{-4}$ | j. $(\frac{1}{2})^{-4}$ |
| c. $(0,1)^{-3}$ | g. 5^{-2} | k. $(-3)^{-2}$ |
| d. $(\frac{-4}{6})^2$ | h. $(\frac{5}{3})^{-3}$ | l. 10^{-4} |

Exercici 10. Esbrineu el signe de les expressions numèriques següents:

a. $(-6)^{-4}$

d. -11^{-5}

g. -4^{-17}

b. $-(+9)^{-8}$

e. $(-11)^{-5}$

h. $-(-0, 11)^{-2}$

c. $(-15)^{-9}$

f. $(\frac{2}{14})^{-6}$

i. $(-\frac{2}{7})^{-2}$

Exercici 11. Expressen aquestes fraccions com a potències:

a. $\frac{1}{100}$

c. $\frac{1}{2^4}$

e. $\frac{125}{27}$

b. $\frac{1}{8}$

d. $\frac{1}{a^5}$

f. $\frac{16}{32}$

Exercicis de reforç

Exercici 12. Ordeneu els nombres següents, una vegada calculats:

- | | | | |
|-------------|-----------|-------------|--------------|
| a. 2^3 | c. 3^2 | e. $(-3)^2$ | g. $(5-2)^0$ |
| b. 2^{-3} | d. -3^2 | f. 2^{-1} | h. -1 |

Exercici 13. Calculeu aquestes potències:

- | | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| a. 5^1 | c. $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$ | e. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ | g. $-\left(\frac{5}{3}\right)^3$ |
| b. $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ | d. $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ | f. $\left(\frac{-5}{3}\right)^3$ | h. $\left(\frac{-6}{5}\right)^{-4}$ |

Exercici 14. Esbrineu el signe de les expressions següents. Raoneu la resposta.

- | | | |
|-----------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| a. $(-4)^{30}$ | d. 0^{100} | g. $\left(\frac{-3}{10}\right)^4$ |
| b. $(-4)^{-10}$ | e. $(-1)^{-23}$ | |
| c. 3^{13} | f. $\left(\frac{-2}{7}\right)^{-3}$ | h. $-\left(\frac{1}{7}\right)^3$ |

Exercici 15. Expressen aquestes potències com a potències d'exponent negatiu:

- | | | |
|---------------------|-----------------------|--------------------------|
| a. $\frac{1}{1000}$ | d. $\frac{1}{3^{20}}$ | g. $\frac{a^2}{b^2}$ |
| b. $\frac{16}{25}$ | e. $\frac{100}{25}$ | h. 5^2 |
| c. $0,5^3$ | f. $0,1^2$ | i. $\frac{1}{3 \cdot 3}$ |

Exercici 16. Diguen quines de les expressions següents són iguals:

A.

a. 3^2

b. -3^2

c. 3^{-2}

d. $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

e. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

f. $(-3)^{-2}$

B.

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

b. $\frac{4}{9}$

c. $\frac{9}{4}$

d. $- \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$

e. $\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}$

f. $- \left(\frac{2}{3}\right)^0$

C.

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

c. 2^3

d. $(-2)^{-3}$

e. $- \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

1. Exercici 1: (a.) 125, (b.) $16/81$, (c.) 1, (d.) $-512/1728 = 8/27$, (e.) -243 , (f.) $-3125 \cdot 10^5$, (g.) -10^7 , (h.) 0,008, (i.) 0,00234256, (j.) $81/16$, (k.) 22, (l.) 1
2. Exercici 2: (a.) 2^6 , (b.) 2^4 , (c.) 3^4 , 9^2 , (d.) No es pot posar en forma potencial ($420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$), (e.) Factoritzant en nombres primers, tenim que $520 = 2^6 \cdot 3^2 = (2^3)^2 \cdot 3^2 = (2^3 \cdot 3)^2 = 24^2$, (f.) Factoritzant en nombres primers, obtenim $2^4 \cdot 3^4 = 6^4$
3. Exercici 3: (a.) $a = d$, $b = c$, (b.) $a = e$, (c.) $a = e$
4. Exercici 4: (a.) $(\frac{3}{5})^3$, (b.) $2^3 \cdot 3^3$, (c.) $(2 \cdot a)^3$, (d.) $3^3 \cdot b^2$, (e.) 2^4 , 4^2 , (f.) 10^5
5. Exercici 5: (a.) 2 operacions: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, (b.) 4 operacions: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5) = (25 \cdot 5)(25 \cdot 5) = (125)(125) = 15.625$ (c.) 2 operacions: $(2 \cdot 2) \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8$ (d.) 4 operacions
6. Exercici 6: (a.) $-2^3 = -8$, (b.) $2^3 = 8$, (c.) $3^2 = 9$, (d.) $-3^2 = -9$, (e.) $(-3)^2 = +9$. Per tant, $d < a < b < c = e$
7. Exercici 7: (a.) $-$, (b.) $-$, (c.) $+$, (d.) $+$, (e.) $+$, (f.) $-$, (g.) $+$, (h.) $-$, (i.) $+$
8. Exercici 8:
 - A. $b < d < c < a$,
 - B. $a < c < e < d < b$, ja que (a.) $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ (b.) $(\frac{-3}{4})^4 = \frac{81}{4} = 20,25$
(c.) $(\frac{-4}{-6})^2 = \frac{4}{9} \simeq 0,4$ (d.) $5^1 = 5$ (e.) $\frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$
 - C. $d < c < e < a < b$, ja que (a.) $3^2 = 9$, (b.) $(-5)^2 = 25$, (c.) $-5^2 = -25$,
(d.) $(-3)^2 = -27$, (e.) $(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$

1.2 Propietats de les potències

Activitat 17. D'aquestes expressions, (a.) agrupeu aquelles que cregueu que són semblants (b.) trebal·leu en grups per a escriure una regla que permeti simplificar les expressions a cada grup (c.) mostreu de forma clara com s'aplica cada regla per a simplificar les expressions .

$7^3 \cdot 7^2$	$a^3 \cdot a^n$	$(a^{2x})^5$	$\frac{p^5}{p^m}$
$\frac{b^{10}}{b^7}$	$a^4 \cdot a$	$b^7 \cdot b^m$	
	$(5^3)^5$	$(2^4)^7$	$b^{2x} : b$
$(3^2)^4$	$\frac{11^{13}}{11^9}$	$a^7 \cdot a^2$	$\frac{5^9}{5^2}$
$m^4 \cdot m^2 \cdot m^3$		$7^7 : 7^4$	
$b^8 \cdot b^5$	$(b^5)^n$	$(x^y)^3$	$(a^5)^2$
$5^4 \cdot 5^3$	$(p^4)^n$	$\frac{a^6}{a^2}$	

Exercici 18. Completeu:

a. $\frac{8^{-3}}{8^{-10}} = 8^{\boxed{}}$

d. $\frac{4^{-6}}{4^7} = 2^{\boxed{}}$

b. $(8^4)^8 = 8^{\boxed{}} = 2^{\boxed{}}$

e. $(5^8 \cdot 4^{-8})^{-11} = 5^{\boxed{}} \cdot 4^{\boxed{}}$

c. $5^3 \cdot 5^{-5} = 5^{\boxed{}}$

f. $(7^{-4} \cdot 9^4)^{-10} = \left(\frac{9}{7}\right)^{\boxed{}}$

Exercici 19. Expressiu com una sola potència:

a. $5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^7$

c. $4^2 \cdot 4^{-4} \cdot 4^{-1}$

d. $6^4 \cdot 6^2 : 6^3$

b. $7^4 \cdot 7^{-2} \cdot 7^3$

e. $8^2 \cdot 8^{-1} : 8^5$

f. $3^{-4} \cdot 3^5 \cdot 3^7$

g. $3^{10} : 3^5 : 3^2$

i. $9^2 : 9^{-4} : 9^5$

h. $5^{-3} : 5^4 \cdot 5^8$

Exercici 20. Opereu aquestes potències i deixeu el resultat en forma de potència:

a. $5^2 \cdot 3^2$

c. $7^6 \cdot 3^6$

e. $25^7 : 5^7$

b. $4^{14} \cdot 2^{14}$

d. $45^2 : 9^2$

f. $63^3 : 7^3$

Exercici 21. Expressiu com una sola potència:

a. $(4^3)^4$

c. $(21^5)^8$

e. $(6^{-4})^7$

b. $(5^7)^2$

d. $(5^2)^{-3}$

f. $(3^{-1})^{-2}$

Exercici 22. Reduïu a una sola potència:

a. $(5 \cdot 5^3)^2 : 5^{-2}$

f. $3 \cdot (3^2)^2 \cdot (3^3)^3 \cdot (3^4)^4$

b. $2^3 \cdot (2^{-3} : 2 \cdot 2^7)^3 \cdot (2^{11} : 2^4 : 2^3)^{-4}$

g. $3^5 : ((3^{23} : 3^{17})^2 \cdot 3^7)$

c. $(-3)^4 : (-3)^{-3} \cdot ((-3)^9)^{-2}$

h. $5^3 \cdot 5^{-6} : 5^{-9}$

d. $(((-2)^3)^5)^0$

i. $(\frac{2}{3})^{-3} \cdot 2^3 : 3^5$

e. $(a^5 : a^3)^2 \cdot (a^{-7} : a^{-2})^4$

j. $(-2)^4 \cdot 4^2 : (-8)^2$

Exercici 23. Reduïu a una sola potència:

a.

c.

$$\frac{(5^3 \cdot 5^2)^3}{5^4 : 5^2}$$

$$\frac{(4^3)^2 \cdot (-4)^5}{4^2 \cdot 4} \cdot \frac{4^8 : (-4)^2}{4^9 : (4^4)^2}$$

b.

d.

$$\frac{4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^7}{4^9 \cdot 4^{-11} : 4^{15}} \cdot 4^3$$

$$\frac{(4^{23} \cdot 4^{14})^2}{4^{25} : 4^{23}}$$

e.

$$\left(\frac{2^3 \cdot 2^5}{2}\right)^3 \cdot 2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 2$$

f.

$$\left(\frac{2^{15} \cdot (2^{10} \cdot 2^7)^3}{2^3 \cdot 2 \cdot 2^2}\right)^3 \cdot 2^{-8} \cdot \frac{2^3 \cdot 2^7}{2^6 \cdot 2^3}$$

Exercici 24. Completeu:

a. $(3^6 \cdot 3^{-4})^3 \cdot 3^{\square} = 3^{17}$

d. $(3^{\square})^{-3} \cdot 3^3 \cdot 3 = 3^{-31}$

b. $(3^6 \cdot (3^2)^3)^4 \cdot 3^{40} \cdot 3^{\square} = 3^{-10}$

e. $(3^8 \cdot 3^3)^{\square} : 3^{-2} = 3^{13}$

c. $(2^{\square})^{-2} \cdot 2^6 = 2^{34}$

f. $(5^2 \cdot 5^3)^{\square} \cdot (5^2)^3 = 5^{105}$

Exercici 25. Calculeu:

a.

$$(2^3 \cdot 2 \cdot 2^{11})^{-3} : (2^{-15} \cdot 2^{11})$$

e.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)^5$$

b.

$$\left(6^7 \cdot \frac{6^3 \cdot 6^8}{6^{-3}}\right)^{-2} \cdot 6^2$$

f.

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-4} : 5^{-6} \cdot 3^4$$

c.

$$(0,5^2)^3 \cdot 0,5^3 : (0,5^8 : 0,5^4)$$

g.

d.

$$(2^{-3} \cdot 2^{-8} \cdot 2^{10}) ((2^3)^6 : 2)$$

$$(-3)^2 (-3)^4 3^8 : (3^8 3^2 : 3^{-5})^0$$

Exercici 26. Simplifiqueu fins a obtenir una sola potència:

a.

$$\frac{2^{-6} \cdot (2^2)^{-4}}{2^{10} \cdot 2^{-3}}$$

b.

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{10} : (5^{-2} \cdot (-5)^2)}{5^2 \cdot 5^7}$$

c.

$$\frac{(x^8 \cdot x^3 : x)^3}{(x^{10} : x^2)^3}$$

d.

$$\frac{5^3 \cdot (5^3)^{-2} \cdot 5^2}{(5^2)^4 \cdot 5^3 \cdot 5^{20}}$$

Exercici 27. Simplifiqueu (potser sigui convenient factoritzar els nombres més grans):

a. $5^{-3} : 5^4$

h. $\frac{\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}$

b. $(2^3)^{-2} \cdot 2^{-3}$

c. $\frac{(-4)^2 \cdot 2^3}{2^{-2}}$

i. $\frac{4^2 \cdot 2^3 : 2^{-1}}{2^{-3} \cdot 8}$

d. $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4$

j. $\frac{2^3 \cdot (-2^4)^2}{2^{-5}} \cdot (-2)^3$

e. $(-2)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^3$

k. $\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^{-4}}{2^5}$

f. $\left(\frac{5^{-3}}{2^{-3}}\right)^2$

l. $\left(\left(\frac{1}{-16}\right)^{-2} : \left(\frac{-2}{16}\right)^3\right)^{-3}$

g. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

m. $\frac{8^3 \cdot 2^3}{4^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

Solucions de “Propietats de les potències”

- Exercici 22 (a.) 5^{10} (b.) 2^{-4} (c.) $(-3)^{-11}$ (d.) 1 (e.) a^{-16} (f.) 3^{30} (g.) 1 (h.) 5^6 (i.) $2^{-1} \cdot 3^{-2}$ (j.) -2^2
 - Exercici 23 (a.) 5^{13} (b.) 4^{33} (c.) -4^{13} (d.) 4^{72} (e.) 2^{-16} (f.) 2^{-9}
 - Exercici 24 (a.) -13 (b.) -18 (c.) -20 (d.) 11 (e.) 1 (f.) 20
 - Exercici 25 (a.) 2^{47} (b.) 6^{-40} (c.) $0,5^5$ (d.) 2^{-4} (e.) $-\left(\frac{2}{5}\right)^2$ (f.) $5^{-10} \cdot 3^8$ (g.) 3^{14}
 - Exercici 26 (a.) 2^{-27} (b.) 5^{-19} (c.) x^6 (d.) 5^{-32}
 - Exercici 27 (a.) 5^{-7} (b.) 2^{-9} (c.) 2^9 (d.) $\left(\frac{2}{5}\right)^7$ (e.) -1 (f.) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-6}$ (g.) 2^2 (h.) $\left(\frac{5}{2}\right)^3$ (i.) 2^8 (j.) -2^{19} (k.) -2^{-6} (l.) -2^{-51} (m.) 2^{13}
-

c.

$$\frac{0,00005:0,000004}{125.000 \cdot 800.000}$$

d.

$$0,00005 \cdot \frac{124.000 \cdot 40.000}{60.000 \cdot 0,00003} : 0,000002$$

Exercici 32. Compareu el diàmetre del Sol amb la longitud d'una formiga. Quantes formigues cabrien en línia a l'equador del Sol?

Dades: (a.) Diàmetre del Sol: 1.392.000 km (b.) Longitud d'una formiga: entre 2 i 25 mm

Exercici 33. Compareu el pes d'un portavions amb el pes un foli DIN A4. Aproximadament, quants folis fan falta per igualar el pes d'un portavions?

Dades:

- L'USS Franklin pesa 27.100 tones
- Les dimensions d'un DIN A4 són 210×297 mm
- Hi ha 2^4 DIN A4 a una foli DIN A0
- Un DIN A0 té una superfície de 999949 mm^2
- Freqüentment el gramatge dels folis és de 80 g/m^2

Exercici 34. Trobeu quantes vegades és més gran una balena en relació a una puça.

Dades: (a.) la balena blava té 32,9 m de llargària com a màxim i és l'animal més gran que ha existit mai. (b.) Una puça fa com a màxim 3,3 mm de llarg

Exercici 35. Quant més alt és l'Empire State Building que una persona

Dades: l'Empire State Building fa 443,2 m i podeu estimar l'alçada d'una persona entre 1,5 m i 2 m.

Exercici 36. La dita "És més difícil que trobar una agulla en un paller", indica la dificultat extrema de trobar una agulla en un paller. Trobeu quantes agulles caben en un paller.

Dades: una agulla de cosir té entre 0,25 mm i 0,70 mm de diàmetre i 38 mm de llarg. El graner el podeu suposar de $10 \times 10 \times 4$ m. Nota: compareu els volums

Exercici 37. Expresses en notació científica les mesures d'aquesta taula (figura 1.1) i compareu-les.

Esdeveniment	Mesura (m)
Distància mitjana Terra-Lluna	150.000.000.000
Diàmetre mitjà terrestre	12.800.000
Distància Palma-Alcúdia	75.000
Diàmetre mitjà de Júpiter	140.000.000
L'altura d'una persona	1,75
La distància mitjana entre el Sol i Alfa-Centauri	40.790.494.000.000.000

Figura 1.1 Diverses mesures

Exercici 38. L'àlbum *Thriller* d'en Michael Jackson és el disc de vinil **més venut**, amb un total de 42,4 milions de còpies venudes arreu del món. Es diu que si apiléssim tots els LP junts aniríem i tornariem a la Lluna. És certa aquesta afirmació?

Dades: Gruixa d'un disc de vinil (amb la funda): 2 mm. La distància de la Terra a la Lluna és de 150.000.000 km (figura 1.1).

Exercici 39. Aproximadament, quant més gran és la Terra en relació a un àtom? (preneu com a referència el radi mitjà de l'Urani, que és de 156 picòmetres). Un picòmetre és la mil milionèsima part d'un mil·límetre.

Exercici 40. Calculeu els volums dels cossos del sistema solar (figura 1.2) i passeu-los a notació científica. Utilitzeu aquesta informació per a comparar-los (feis servir el tamany de la Terra com a patró).

Cos	Radi mitjà (m)	Lluna major
El Sol	696.342.000	cap
Mercuri	2.439.700	cap
Venus	6.051.800	cap
La Terra	6.371.000	la Lluna (\varnothing 3.474.200 m)
Mart	3.390.000	Fobos (\varnothing 22.200 m)
Júpiter	69.911.000	Ganímedes (\varnothing 5.262.400 m)
Saturn	58.232.000	Tità (\varnothing 5.150.000 m)
Urà	25.362.000	Titania (\varnothing 1.576.800 m)
Neptú	24.622.000	Tritó (\varnothing 2.705.200 m)
Plutó	1.161.000	Caronte (\varnothing 1.207.000 m)

Figura 1.2 Cossos del sistema solar

Exercici 41. Quin planeta del sistema solar té la lluna més gran (vegeu la figura 1.2)? Quantes vegades hi cap la Lluna?

Exercici 42. Quant de temps tardaríem a arribar al Sol des de la Terra anant en cotxe? (podeu suposar que aniríem a 100 km/h). La distància orbital de la Terra oscil·la entre 147.098.290 i 152.098.232 km.

Exercici 43. Passeu aquestes mesures a la unitat estàndard corresponent i esbrineu quantes vegades cabria, aproximadament, un objecte que tingué la mesura menor dins un objecte que tingué la mesura major.

- a. 40 quilòmetres i 3 mil·límetres
- b. 54,56 dam i 3 centímetres
- c. 10^{-6} mil·límetres i 0,45 quilòmetres
- d. 48000 quilòmetres i 0,0002 mm

Exercici 44. La Via Làctia té un radi aproximat de 50.000 anys llum. Què tardaríem a creuar de punta a punta la Via Làctia en cotxe? I si anàssim amb un coet espacial? Passeu els resultats a anys.

Dades necessàries: Un any llum és la distància que recorre la llum en un any (a.) La velocitat de la llum és de 300.000 km/s, aproximadament (b.) Podeu suposar que tenim un fórmula 1, amb una velocitat mitjana de 370 km/h (c.) Podeu **suposar** que el coet va a 30.000 km/h

Exercici 45. Feis una línia del temps dels esdeveniments següents (figura 1.3). L'abreviatura "ma" significa milions d'anys.

Abans de fer-ho, passeu el temps a notació científica i distribuir-los en un segment d'acord amb l'exponent de la base 10.

Exercici 46. Quantes gotes d'aigua caben a una piscina?

Dades necessàries: (a.) Mesures d'una piscina olímpica: $50 \times 25 \times 2$ m (b.) 20 mil gotes és un litre

Esdeveniment	Ocurrencia (des de l'actualitat)
Big Bang	15.000 ma
Formació de les galàxies	13.000 ma
Formació de la Via Làctia	10.000 ma
Formació del Sol	5.000 ma
Formació de la Terra	4.500 ma
Aparició de la vida procariòtica	3.500 ma
Aparició de la vida eucariòtica	1.500 ma
Aparició dels primers peixos	490 ma
Aparició dels primers animals terrestres	415 ma
Pangea	280 ma
Extinció dels dinosaures	65 ma
Aparició dels primers primats	50 ma
Homo erectus	2 ma
Homo sapiens	200.000 anys
Naixement de Crist	2013 anys
Naixement de Einstein	134 anys

Figura 1.3 Alguns esdeveniments *rellevants* en la història de l'univers

2 Àlgebra

2.1 Llenguatge algebraic

2.1.1 Llenguatge formal i llenguatge literari

Exercici 47. Expressen en llenguatge algebraic:

- a) El doble d'un nombre.
- b) La resta d'un nombre menys cinc.
- c) El quadrat d'un nombre més un altre nombre.
- d) La cinquena part d'un nombre més cinc.

Exercici 48. Passeu a llenguatge algebraic aquestes frases:

- a. Dues vegades un nombre desconegut
- b. La suma d'un nombre desconegut i cinc
- c. La meitat d'un nombre menys la cinquena part d'aquest mateix nombre
- d. El quadrat d'un nombre
- e. El terç de la suma de dos nombres qualssevol

Exercici 49. Passeu a llenguatge algebraic:

- a. “La suma de tres i cinc és igual a vuit”
- b. “Cinc més un nombre és igual a deu”
- c. “Dues vegades un nombre més quatre és igual a vint”
- d. “El triple d’un nombre més quatre és trenta-quatre”
- e. “Dues vegades un nombre més dos és igual a quaranta-dos”
- f. “Cinquanta menys vint són trenta”
- g. “Tres vegades un nombre més tres és igual a trenta”
- h. “El doble d’un nombre més cinc és igual a quinze”
- i. “La resta de dos i un nombre desconegut és deu”
- j. “La suma d’un nombre desconegut i cinc és diset”

Exercici 50. Passeu a llenguatge algebraic les frases següents:

- a. “El doble d’un nombre més dos és igual a vint-i-quatre”
- b. “El triple d’un nombre més deu és igual a aquest nombre més dos”
- c. “La suma d’un nombre desconegut i dos és igual a dues vegades aquest nombre desconegut”
- d. “La resta d’un nombre desconegut i cinc és igual a cent”
- e. “El doble de la suma d’un nombre i cinc és igual a vint-i-quatre”
- f. “Un nombre desconegut més dos dóna quaranta-vuit”

Exercici 51. El nombre de litres de benzina consumits i el nombre de quilòmetres recorreguts es relacionen de la següent manera. Si diem n a un nombre genèric de litres consumits, quants de quilòmetres recorrerem si consumim n litres de benzina, segons la taula?

Litres	3	4	5	6	7	...	n
Quilòmetres	33	43	53	63	73	...	

Exercici 52. Relacioneu la frase amb l'expressió algebraica corresponent:

- Frases:
 - a. La meitat d'un nombre
 - b. La suma de dos nombres consecutius
 - c. La resta d'un nombre desconegut i deu
 - d. Deu vegades un nombres
- Expressions algebraiques:
 - a. $10x$
 - b. $\frac{x}{2}$
 - c. \sqrt{x}
 - d. $5 - x + 10$
 - e. $x:2$
 - f. $x \cdot 10$
 - g. $x + y$
 - h. $x - 10$
 - i. $10 - x$
 - j. $y + x$

Exercici 53. Escriviu en llenguatge algebraic:

- a. El triple d'un nombre més dos.
- b. Un nombre menys la seva meitat.
- c. El doble de la suma d'un nombre més tres.
- d. Tres menys la suma d'un nombre més el seu doble.
- e. Set més un nombre disminuït en quatre unitats.
- f. Un nombre més el seu quadrat.
- g. El doble d'un nombre.
- h. El quadrat d'un nombre.
- i. Un terç d'un nombre menys el doble d'un altre.
- j. Un nombre menys el seu triple.
- k. La suma de dos nombres consecutius.
- l. El quocient entre un nombre i un altre.

- m. El producte de dos nombres parells consecutius. 80 € en total. La camisa costa 35 € menys que els pantalons.
- n. El quocient entre dos nombres consecutius. r. En augmentar 2 cm el costat d'un quadrat, la seva superfície augmenta 24 cm^2
- o. El quadrat de la suma de dos nombres. s. La diferència entre els quadrats d'un nombre i el nombre anterior a aquest és 21.
- p. El producte de dos nombres parells consecutius és 48. t. La suma de dos nombres és 22 i la seva diferència és 8.
- q. Uns pantalons i una camisa costen

2.1.2 Identitats i equacions

Activitat 54. (“Sempre, de vegades, mai”). Activitat manipulable: es tracta de classificar cartolines amb igualtats segons si aquestes passen sempre, a vegades o mai. Veure carpeta 01-Sempre-a-vegades-mai/

Exercici 55. Digueu si les igualtats següents són identitats o equacions:

- a. $3x + 2 = 5$ g. $6x = 2x \cdot 3x$
- b. $-2x + 5 = 4x + 5 - 6x$ h. $10x = 2x \cdot 5$
- c. $2x - 1 = 2x$ i. $5x + 6 = 2x + 3x + 7$
- d. $3x - 1 = 4x - x - 1$ j. $x^2 - 3 = 2x - 3$
- e. $2(x + 1) = 2x + 2$ k. $5x^2 + x = 2x^2 + 2x + 3x^2 - x$
- f. $2x + 8x = 8x + 2x$ l. $5x^3 = 2x^3 - (-3x^3)$

Exercici 56. Quin terme (o termes) manca per a què les igualtats següents siguin certes?

- a. $3a \underline{\hspace{2cm}} = 6a$
- b. $4a \underline{\hspace{2cm}} = 2a - 3b$
- c. $4a \underline{\hspace{2cm}} + b = 6a - b + 1$

d. $\frac{a}{3} - b \text{ ----- } \frac{2a}{3} + 2b$

e. $\frac{a}{3} + \text{ ----- } = \frac{a}{2}$

Exercici 57. Digueu si les següents expressions són equacions o identitats. Justifiqueu la resposta.

a. $x + 3x = 4x$

b. $7x^2 - 5x^2 + 2 = 2x^2 + 2$

c. $10x - 1 = 9$

2.2 Equacions

2.2.1 Equacions senzilles i amb parèntesi

Exercici 58. Resoleu les equacions següents i comproveu-ne la solució

a) $3x + 2 = 35$

c) $56x + 33 = -23$

b) $11x - 18 = 4$

d) $5x + 25 = 125$

Exercici 59. Resoleu les equacions següents:

a) $5x + 2 = 10x - 18$

d) $-x - 20 = 8x + 781$

b) $4x + 90 = -4 + 2x$

e) $3x - 2 = 8x + 4 - 8x$

c) $16x - 8 = x + 22$

f) $\frac{x}{4} - 4 = 32$

Exercici 60. Resoleu:

a) $3x + 5 = 7x - 2$

e) $3(x + 2) = 5x$

b) $8x - 10 = 8x - 10x + 2$

f) $2(x - 1) = x + 5$

c) $x - 2 = 4x + 5$

g) $6x - 2x + 3x = 5(-x + 2)$

d) $7x - 8 = 5x + 2$

h) $8x = 7x + x + x - 2$

Exercici 61. Resoleu:

a) $6x + 2 - x = 7x - 6 + 2x + 8 + 2x + 6$

e) $80x - 20 + 70x = 79x - 2x - 93$

b) $x + 2 - 2x + 5x + 2 = 6x - 3 + 4$

f) $7x + 3 - 4x + 8 = -3 + 4x + 19$

c) $-x + 2x - 1 + 5x + 4 = 7x + 2 + 40x - 81$

g) $24x - 8 + 6x + 1 = 42x + 1$

d) $28x - 34 + 20x - 100 = 10x - 2 + 35x$

h) $-2 - x + 10 + 8x = -4x + 24x$

i) $2x + 5 - x + 2 = 2x + 2 + 14x$ j) $5x + 4 - 2x + 8 + 7x + 3 = -20x$

Exercici 62. Resoleu:

a) $6(x + 2) - x + 2 - 8x = 7x - 2 - (7 - 2x) + 35$

b) $-(x + 2) - 2(-3 - x) + 5x - 3 = 5(x + 2) - 6x - 16$

c) $-3(x + 2) - 1 + 5(-x - 4) = -7(-5x - 2) + x - (-x + 2) + 51$

d) $5(5x - 2) - 30 - 20(-3x + 2) = 5 - (10x - 2) + 5x + 183$

e) $8(x - 3) + 5 - 40x = 5 - (8x - 5) + 13$

f) $5 - 3(4x - 1) + 6(x - 10) + 3 = 5 + 2(x + 2) - (10x - 5) - 64$

g) $5(x - 2) + 5x - (2 - 5x) + 1 = 3(x - 2) + 3$

h) $12 - 12(2 - 3x) + 120 = -48(x + 2) + 239$

i) $1 - (x - 4) - (5 - 2x) - (-3 - 4x) = 6(2x - 3) - 7(-2x + 3)$

Exercici 63. Resoleu:

a) $3x - (x - 2) = 4x + 1$

b) $4(x + 3) - (2x - 7) = 6x + 18$

c) $5 - (3 - x) = 2(x + 2) - 3$

d) $2x - (9x + 2) + 4x = 43 - x + 8 - x - 13$

e) $2(x - 2) - (5 - x) = 3x + 2 - 6(x + 2)$

f) $2x - (x - 3) - 2(5 - x) = 6 - x + 8x - 1$

Exercici 64. Resoleu:

a) $5x + 10 - 4x - 3x - 4 + 2x = 5x - 6x$

b) $x - 1 + 2x - 2 - 3x + 4 = 5x - 6 + 7$

c) $2x + 5x - 7 + 5x = 10x - 6$

d) $x - 3x + 6 - 3x = 9x + 7 - 2x$

e) $2x - 3x + 6 + x = 9 + x + 7$

f) $9x - 81 + 25x - 70 - 45x - 91 = 0$

Exercici 65. Resoleu les equacions següents amb parèntesi:

a) $2(x + 4) - 3(-x - 2) + 3 = 4x + 16$

b) $-2(1 - x) + 4 - x = -2(-2 - 2x) + 2x - 2$

c) $-(1 - x) + 4(x + 2) = -1(-2 - x) - 2 + 11x$

Exercici 66. Resoleu les equacions següents amb parèntesi:

a) $x - 5(x - 2) = 6x$

g) $3(x + 7) - 6 = 2(x + 8)$

b) $120 = 2x - (15 - 7x)$

h) $60x + 1 = 3(3 + 4x)$

c) $6(x + 11) = 40 + 6(x + 2)$

i) $3(x + 8) = 6(x - 2) + 24$

d) $2(x - 17) = x - 3(12 - 2x)$

j) $7(x - 18) - 3(x - 14) = 0$

e) $x - 5(x - 2) = 6$

k) $3x - 4(x - 2) - 5 = x + 10 - (x + 5) + x$

f) $5(x + 4) = 7(x - 2)$

l) $5x - 3(x + 5) = 3x + 10$

Exercici 67. Resoleu:

$$5x + 80 - 3(5 - 7x) = 2x - 5(2x - 4) - (3 - x).$$

Exercici 68. Resoleu les equacions següents:

a) $2x - 4 = 5$

e) $44x - 11 + 56x = 2x + 1$

b) $5x - 2x + 1 = x + 3$

f) $x - (4 + 7x) = -80x - (9x + 24)$

c) $60x - 40 + 74x = 80x - 90x + 24$

g) $55(x - 9) + x = -4(x + 84) - 45x$

d) $55x - 99x + 845 + x = -4x + 84 + 45x$

h) $4 - (4x - 11) + 56x = 2(x + 1)$

i) $x + (2x - 20) = 4(x - 45)$

Exercici 69. Resoleu:

$$x + 2x - 20 + 3x - 35 = 4x - 45 + 55x - 58 + 76x - 90.$$

- 58 (a.) $x = 11$ (b.) $x = 2$ (c.) $x = -1$ (d.) $x = 20$
59 (a.) $x = 4$ (b.) $x = -47$ (c.) $x = 2$ (d.) $x = -89$ (e.) $x = 2$ (f.) $x = 144$
60 (a.) $x = 7/4$ (b.) $x = 6/5$ (c.) $x = -7/3$ (d.) $x = 5$ (e.) $x = 3$ (f.) $x = 7$
(g.) $x = 5/6$ (h.) $x = 2$
61 (a.) $x = -1$ (b.) $x = 3/2$ (c.) $x = 2$ (d.) $x = 44$ (e.) $x = -1$ (f.) $x = -5$
(g.) $x = -2/3$ (h.) $x = 8/13$ (i.) $x = 1/3$ (j.) $x = -1/2$
62 (a.) $x = -1$ (b.) $x = -1$ (c.) $x = -2$ (d.) $x = 3$ (e.) $x = -7/4$ (f.) $x = -1/2$
(g.) $x = 2/3$ (h.) $x = 5/12$ (i.) $x = 2$
63 (a.) $x = 1/2$ (b.) $x = 1/4$ (c.) $x = 1$ (d.) $x = -40$ (e.) $x = -1/6$ (f.) $x = -3$
64 (a.) $x = -6$ (b.) $x = 0$ (c.) $x = 1/2$ (d.) $x = -1/12$ (e.) $x = -10$ (f.) $x = -22$
65 (a.) $x = -1$ (b.) $x = 0$ (c.) $x = 1$
66 (a.) $x = 1$ (b.) $x = 15$ (c.) no té solució (d.) $x = 2/5$ (e.) $x = 1$ (f.) $x = 17$
(g.) $x = 1$ (h.) $x = 1/6$ (i.) $x = 4$ (j.) $x = 21$ (k.) $x = -1$ (l.) $x = -25$
67 $x = -16/11$
68 (a.) $x = 9/2$ (b.) $x = 1$ (c.) $x = 761/84$ (d.) $x = 6/49$ (e.) $x = -20/83$
(f.) $x = 53/35$ (g.) $x = -13/50$ (h.) $x = 160$
69 $x = 46/43$

2.2.2 Comprovació

Exercici 70.

a. ¿És $x = -2$ solució de l'equació

$$3x - (4x + 2) - 6(3 - x) = 7 \quad ?$$

b. ¿És $x = \frac{1}{2}$ solució de l'equació

$$2(2x - 3) - (9 + x) = -25x \quad ?$$

Exercici 71. Resol i comprova:

a.

$$8x - 4x - 49 = 12x + 80 - x$$

b.

$$5 - (2 - x) = 4(x + 2) - 11$$

Exercici 72. Resol i comprova:

$$3(x - 2) + 3x + 4 = 5 - (x - 2) + 2x + 1$$

Exercici 73. Comproveu si $x = -2$, $x = 2$ o $x = 0$ són solucions de les equacions següents:

a. $2x - 6 + x = -15 + 2x + 9$

f. $2x - 4(x + 3) = 5 + x$

b. $2 - (2x + 3) = 5x + 13$

g. $3 \cdot (6 + x) = 2 \cdot (x + 2) + 12$

c. $5x - (50 + 2x) = x - 3$

h. $4(x - 2) - x = 2 - 4(x - 2)$

d. $45(-x - 2) - 2x - 4 = 0$

i. $3x - 10 = x - 10 + 2x$

e. $x - (2x - 3) + 2(2x - 3) = 3$

Exercici 74. Trobeu dos nombres que **no** siguin solució de les equacions següents:

a. $6x - 4 = 50$

d. $6x - 3 + 30x = 9 - 2x$

b. $-6x + 3 = 21$

e. $2x - 4 + x = 6x - 3 + x$

c. $\frac{x}{4} - 4 = 32$

f. $12x - 8 - 5x = 5x + 1$

g. $3x - 1 + 2x - 1 = 1 + 5x + 3$

h. $50x + 30 = 80x + 20 - 60x$

k. $x - 3 = 2x - 3$

i. $89x - 8 - 4x + 45x = 44 - x$

l. $89x - 78 + 17x = 64 + 4x + 12$

j. $44x - 45 + x = 45x - 2 + x$

Exercici 75. És cert que totes les equacions han de tenir solució? Per justificar la teva resposta, resol les equacions següents:

a. $4x - 3 = 2x + 2$

b. $4x - 3 = 2x + 2 + 2x$

c. $6x - 2 = 2x - 1 + 4x - 1$

Reflexiona què surt en cada cas i *per què*?

Exercici 76. Resol les equacions següents i, si en té, comprova la solució:

a. $3 \cdot (6x - 4) - x = 50$

c. $-(6x - 3) + 30 \cdot (x - 9) - 2x = 0$

b. $-6 \cdot (x + 3) - (2x + 3) = 21$

d. $-2x - 4 + 5 \cdot (x - 3) = 6x - 3 + x$

Solucions de “Comprovació”

1. Exercici 72: $x = 2$
 2. Exercici 73: (a.) $x = 0$ és solució, (b.) $x = -2$ és solució, (c.) Cap és solució, (d.) $x = -2$, (e.) $x = 2$, (f.) Cap és solució, (g.) Cap és solució, (h.) $x = -2$, (i.) Tots ho són (qualsevol nombre és solució)
-

2.2.3 Equacions amb denominadors

Exercici 77. Resol:

$$\frac{3x}{4} + x + 2x = 3 \left(\frac{x}{2} - 2 \right) + 3x + 3$$

Exercici 78. Resol les equacions següents:

a.

$$\frac{2x - 5}{5} - \frac{x - 1}{3} = x - 10$$

b.

$$\frac{5}{2}(4x - 3) + \frac{3x}{5} = 10x - \left(\frac{x}{4} + 4 + \frac{x + 1}{4} \right) - \frac{13}{4}$$

c.

$$2 - (3 - x) - \frac{x + 2}{3} - \frac{3 - x}{5} = 8 + \frac{x - 1}{12}$$

d.

$$3 \left(x + \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{3}(2 - 4x) = \frac{x}{4} + x - \frac{12 - x}{2} + \frac{10x + 4}{3}$$

e.

$$2 - (3 - x) - \frac{x + 2}{3} = \frac{x - 1}{12} - 1$$

Exercici 79. Resoleu aquestes equacions:

a.

$$x - 1 = \frac{3x}{4}$$

$$\frac{x}{2} + 30 = 2x$$

c.

b.

$$x - 20 = \frac{x}{3} + 2$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x-3}{3} = 3$$

d.

k.

$$2 + \frac{x}{3} - 4 = \frac{2x}{3} - 11$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x+2}{2} + x + \frac{4x-2}{2} = 3x - 7$$

e.

l.

$$\frac{x}{3} + 4 - \frac{x}{2} = x - 10$$

$$\frac{x+4}{5} - \frac{x+3}{4} = 1 - \frac{x+1}{2}$$

f.

m.

$$\frac{x}{3} + x - \frac{x}{2} + 2 = \frac{2x}{3} - \frac{5x}{4} + \frac{3x}{2}$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x-2}{2} - \frac{-2x-4}{2} + 4 = x + 3$$

g.

n.

$$\frac{3x}{15} + x - \frac{x}{20} + 2 = -\frac{7x}{12} + x - 42$$

$$\frac{2x-1}{2} + \frac{4x-1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{x}{3} + \frac{6x-1}{2}$$

h.

o.

$$\frac{2x}{6} + x - \frac{-10x}{15} + 2 = 2x - 2$$

$$\frac{4x-12}{-4} + \frac{x}{3} = x + \frac{9-2x}{3} - 3$$

i.

p.

$$x + 5 = \frac{x+3}{3}$$

$$\frac{1}{2}(2x-3) - x = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$$

j.

q.

$$\frac{1}{3}(1-2x) + x - \frac{x}{6} = \frac{1}{4}(3x+12) - \frac{8}{3}.$$

r.

$$x + \frac{2(x-3)}{4} - \frac{5(x+1)}{10} = 1$$

$$\frac{5x-1}{6} = \frac{1}{3}(4+x) + 1$$

w.

s.

$$\frac{x+8}{2} - \frac{x-4}{6} = 2$$

$$\frac{x+2}{3} - 4 = \frac{x}{2} - 6x + 20$$

x.

t.

$$\frac{x-10}{2} - \frac{x-20}{4} - \frac{x-30}{3} = 5$$

$$\frac{x}{2} - \frac{2x+7}{5} = 5$$

y.

u.

$$\frac{3-x}{7} - x + \frac{3+2(x-1)}{14} = 5$$

$$\frac{x}{4} + 5 = \frac{7x}{12}$$

Exercici 80. Resol:

$$\frac{3x}{8} + x + 2x - 6 = 3\left(\frac{x}{4} - 2\right) + 3x$$

Exercici 81. Resol:

a.

$$1 - (2-x) - \frac{x+3}{4} = \frac{x-1}{12} - 1$$

b.

$$\frac{2x-3}{3} + 5x - \frac{5x-3}{4} + 2 = 2(3x+1) - 5$$

c.

$$\frac{3}{2}(4x-3) + \frac{2x}{3} = 5x - \left(\frac{x}{4} + 4 + \frac{x+1}{2}\right)$$

d.

$$\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} - 2\left(x + \frac{x}{4}\right) = \frac{3}{2}(2x-1) - \frac{269}{2}$$

e.

$$x - 1 = \frac{3x}{4}$$

f.

$$x - 20 = \frac{x}{3} + 2$$

g.

$$\frac{2x}{5} - \frac{5x}{10} - 6 = 4x + \frac{5x}{12} + 265$$

h.

$$670 + \frac{x}{3} - (3x+2) = x + \frac{7x}{10} + 2(x-3) - \frac{3x}{4}$$

Exercici 82.

$$3x - 2(x+3) + 4 - \left(-x + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{2} - \frac{1}{3}(3x-6) + \frac{x}{4}$$

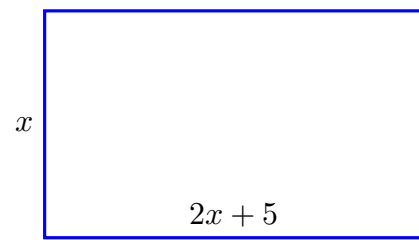
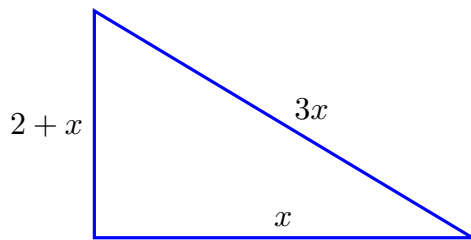
Solucions de “Equacions amb denominadors”

1. Exercici 77: $x = 4$
 2. Exercici 78: (a.) $x = 10$ (b.) $x = 13$, (c.) $x = 13$ (d.) $x = 8$ (e.) $x = 13$
 3. Exercici 79: (a.) $x = 20$ (b.) $x = 4$, (c.) $x = 33$, (d.) $x = 27$, (e.) $x = 12$,
(f.) $x = 24$, (g.) $x = -60$, (h.) no té solució, (i.) $x = -6$, (j.) $x = 24/5$,
(k.) $x = 30$, (l.) $x = 1$, (m.) $x = 24$, (n.) $x = \frac{1}{2}$, (o.) $x = 3$, (p.) $x = -3$,
(q.) $x = 0$, (r.) $x = 5$, (s.) $x = 4$, (t.) $x = 64$, (u.) $x = 15$, (v.) $x = 3$,
(w.) $x = -8$, (x.) $x = 60$, (y.) $x = -\frac{9}{2}$
 4. Exercici 80: $x = 0$
 5. Exercici 81: (a.) $x = 1$, (b.) $x = 3$, (c.) $x = 0$, (d.) $x = 24$, (e.) $x = 4$,
(f.) $x = 33$, (g.) $x = -60$, (h.) $x = 120$
 6. Exercici 82: $x = 106/33$
-

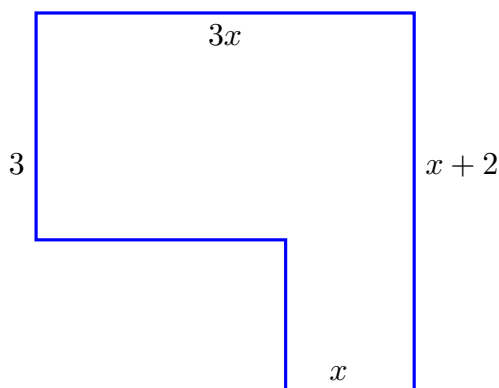
2.2.4 Problemes

2.2.4.1 Problemes geomètrics

Exercici 83. Troba els costats d'aquestes figures sabent que el seu perímetre és el nombre que s'indica (figura 2.1):

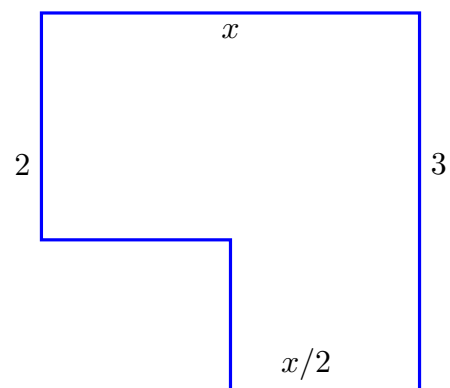


$$P = 22 \text{ m}$$



$$P = 30 \text{ cm}$$

$$P = 120 \text{ mm}$$



$$P = 125 \text{ cm}$$

Taula 2.1 Figures geomètriques de perímetre donat i costats desconeguts

Exercici 84. En un rectangle, la base és 2 cm més gran que l'altura. Si el perímetre del rectangle és igual a 20, quines són les seves dimensions?

Exercici 85. La base d'un triangle isòsceles fa la meitat del seus costats semblants. Si el seu perímetre és 10 cm, què val cada costat?

Exercici 86. En un rectangle, la base és el doble que l'altura. Si té com a perímetre 78 cm, quines dimensions té el rectangle?

Exercici 87. Un quadrat té perímetre 440, què val el costat?

Exercici 88. En un rectangle, l'altura fa el doble que la base més 1 cm. Si el seu perímetre és de 470, quines mesures té el rectangle?

Exercici 89. En un rectangle, l'altura és dues vegades la base menys 20 cm. Sabem que la meitat del perímetre del rectangle és igual a 130 cm. Quan mesura cada costat del rectangle?

Exercici 90. Tenim un rectangle A de base desconeguda i altura 9. I un rectangle B de base el triple que la base del rectangle A i altura 5. Ens diuen que els perímetres de A i de B són iguals. Què valen cada base de cada rectangle?

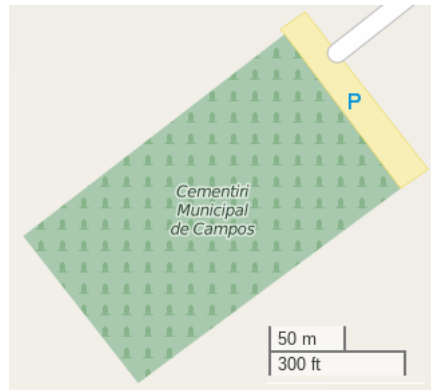
Exercici 91. L'altura d'un rectangle és igual a quatre vegades la seva base menys 4 cm. Si sabem que el perímetre és igual a 82, ¿quant fa cada costat? Quina és la seva àrea?

Exercici 92. En un rectangle, la base és dues vegades l'altura. Si la suma de la base més dues vegades l'altura és igual a 60 cm, què val cada costat del rectangle?

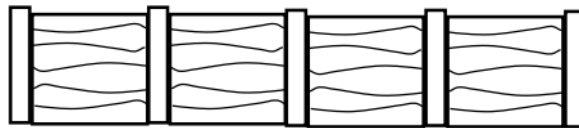
Exercici 93. En un rectangle, l'altura és dues vegades la base menys 20 cm. Sabem que el perímetre del rectangle és igual a 260 cm. Quan mesura cada costat del rectangle?

2.2.4.2 Problemes de situacions reals

Exercici 94. (El vallat del cementiri) Què costaria vallar el cementiri de Campos?



Dades:



- Cada pal costa 10 € i fa 0,5 m de llargària, mentre que cada tanca costa 18 € i mesura 2 m.
- Penseu que cada tanca ha d'estar entre dos pals

Exercici 95. Quin perímetre podríem vallar amb un pressupost de 1000 €? Nota: preneu les dades de l'exercici 94.

Exercici 96. Quants pals i quantes tanques necessitariem si volguéssim vallar un terreny de 2000 m de perímetre? Nota: preneu les dades de l'exercici 94.

Exercici 97. Per enviar un telegrama, la web de Correus ens proporciona la informació següent (figura 2.2):

Envío de documentos: telegrama



Régimen	Tarifa (€)	IVA (€)	Precio final (€)
Régimen continental: comprender los países de Europa, Turquía, Argelia, Egipto, Israel, Jordania, Líbano, Libia, Marruecos, Siria y Túnez			
• Por cada palabra (sin mínimo de percepción)	0,96	0,10	1,06
• Tarifa fija	29,54	3,10	32,64
Régimen intercontinental: comprender los países no incluidos en el régimen continental y que admitan esta modalidad			
• Tarifa por palabra (con un mínimo de percepción por importe de siete palabras)	3,28	0,68	3,96

Taula 2.2 Transcripció de les tarifes 2014 de Correus

- Quant costaria enviar un telegrama de 40 paraules a Europa?
- De quantes paraules podríem escriure en el telegrama si volguéssim gastar-nos 200 € com a màxim? I si l'enviéssim a Japó?

Exercici 98. Les tarifes per enviar un telefax a la web de Correus són (figura 2.3):

Envío de documentos: fax



Régimen	Tarifa (€)	IVA (€)	Precio final (€)
Nacional (Península y Baleares): Entre oficinas de correos y terminales de usuarios telefax			
• Importe fijo por fax	1,22	0,26	1,48
• Importe por cada página	0,82	0,17	0,99
Internacional - Zona A (Península y Baleares): Europa, Turquía, Argelia, Libia, Marruecos y Túnez			
• Importe fijo por telefax	5,83	1,22	7,05
• Importe fijo por cada página	1,88	0,39	2,27
Internacional - Zona B (Península y Baleares): resto de países			
• Importe fijo por telefax	10,92	2,29	13,21
• Importe fijo por cada página	4,06	0,85	4,91

Taula 2.3 Transcripció de les tarifes 2014 de Correus

- a. Què costaria enviar un fax a Holanda de 5 pàgines?
- b. Quantes pàgines podríem enviar si disposéssim de 50 €? I si l'enviéssim a Líbia?

2.2.4.3 Problemes de trobar nombres

Exercici 99. N'Aina ha tret un 6, un 8 i un 4. Què ha de treure al següent examen per a tenir exactament un 5?

Exercici 100. Planteja i resol aquests problemes. En cada cas indica què representa x :

- Trobeu un nombre tal que deu vegades aquest nombre més 4 sigui igual a dues vegades aquest nombre més 44
- El doble d'un nombre més tres és igual a la resta de tres vegades aquest nombre menys 8. Quin és aquest nombre?
- La suma del nombre de bolles que té na Laura més 10 és igual a sis vegades el nombre de bolles que té, menys 10. Quants de bolles té na Laura?
- La suma de dos nombres consecutius és igual a 243. Quin són aquests nombres?
- Trobeu un nombre tal que la resta d'aquest nombre menys 2 sigui igual al doble d'aquest nombre, més 2

Exercici 101. Trobeu un nombre tal que la suma de la cinquena part d'aquest nombre, el doble d'aquest nombre, i 7 sigui igual a 458.

Exercici 102. En una entrevista, l'entrevistat va respondre que la meitat dels anys que tenia més 27 era igual al doble dels anys que tenia. Quants d'anys tenia l'entrevistat?

Exercici 103. Volem esbrinar la duració d'una cançó. L'únic que sabem és que si falta 1 minut per acabar, estam al tercer quart de la cançó.

Exercici 104. Quin és l'únic nombre tal que la suma entre ell i 5 és igual a la seva meitat més 10?

Exercici 105. Trobau un nombre, x , tal que el quadruple de x més 70 sigui igual a 60 més dues vegades x

Exercici 106. El doble d'un nombre més cinc és igual a 251. Quin és aquest nombre?

Exercici 107. La suma d'un nombre i el seu doble és igual a 1287. Quin és aquest nombre?

Exercici 108. Un nombre menys dos és igual a la meitat d'aquest mateix nombre menys dotze. Quin és aquest nombre?

Exercici 109. El doble d'un nombre i cinc dóna 25. Quin és aquest nombre?

Exercici 110. La suma d'un nombre i deu és 25. Quin és aquest nombre?

Exercici 111. La resta de 10 i un nombre és 4. Quin és aquest nombre?

Exercici 112. La resta d'un nombre i quinze és igual a 48. Quin és aquest nombre?

Exercici 113. El triple d'un nombre més 10 és 43. Quin és aquest nombre?

Exercici 114. Quatre vegades un nombre més dos és 30. Quin és el nombre?

Exercici 115. El doble de la suma d'un nombre i 3 és 20. Quin és aquest nombre?

Exercici 116. La resta d'un nombre i la seva meitat dóna 5. Calcula el nombre

Exercici 117. Trobeu un nombre tal que si li sumam 20 és igual al seu doble

Exercici 118. Trobeu un nombre tal que el seu doble més dos és igual a 18.

Exercici 119. Quin és l'únic nombre tal que vuit vegades aquest nombre més el doble d'aquest nombre menys 4 és igual al doble de la resta d'aquest nombre menys 3?

Exercici 120. Trobeu un nombre tal que la seva meitat més el doble del resultat de sumar aquest nombre i 5 sigui igual a 50.

Exercici 121. La suma dos nombres consecutius és igual a 201. Quin són aquests nombres?

Exercici 122. Troba un nombre tal que ell i el seu doble siguin iguals a cinc vegades aquest nombre menys 10

Exercici 123. Troba un nombre tal que en restar-li 5 obtinguem el doble del nombre menys 12.

Exercici 124. Es pensen dos nombres. El segon és dues vegades el primer més 3. I sabem que entre els dos fan 33. Quin són aquests nombres?

Exercici 125. La meitat d'un nombre més 30 és igual a cinc vegades aquest nombre menys 24. Quin és aquest nombre?

Exercici 126. Un terç d'un nombre més quatre és igual a un quart d'aquest nombre més 6. Quins són aquests nombres?

Exercici 127. El doble d'un nombre més 3 és igual a la diferència del triple d'aquest nombre i 7. Quin és aquest nombre?

Exercici 128. El triple d'un nombre més 4 és igual al doble de la suma d'aquest nombre i 1, més 7. Quin és aquest nombre?

Exercici 129. Trobeu un nombre tal que el triple d'aquest nombre menys deu sigui igual al doble de la resta d'aquesta nombre i 5, més 5

Exercici 130. Trobeu un nombre tal que la suma d'aquest nombre i 2 és igual al doble de la diferència de 3 i aquest nombre, menys 10

Exercici 131. La meitat de la suma d'un nombre i 5 és igual al doble de la diferència d'aquest nombre i 1. Quin és aquest nombre?

Exercici 132. Cinc vegades la resta d'un nombre i 10, més tres vegades aquest nombre és igual al doble d'aquest nombre, menys 7. Quin és aquest nombre?

Exercici 133. El doble de la diferència d'un nombre i cinc és igual a la suma d'aquest nombre, 7 i el doble d'aquest nombre. Quin és aquest nombre?

Exercici 134. Quatre vegades un nombre, més 3 és igual al triple de la suma de la meitat d'aquest nombre i 3, menys 2. Quin és aquest nombre?

Exercici 135. La diferència de tres vegades un nombre i 5 és igual al doble de la suma d'aquest nombre i 2, més 1. Quin és aquest nombre?

Exercici 136. Trobeu un nombre tal que set vegades la diferència de 10 i aquest nombre és igual a quatre vegades aquest nombre més la meitat de la suma d'aquest nombre i 2.

Exercici 137. Deu vegades la suma d'un nombre i 6, més 15 és igual al triple de la diferència d'aquest nombre i 2, més 109. Troba a què és igual aquest nombre

Exercici 138. Trobeu un nombre tal que la meitat d'aquest nombre més 5 és igual a la meitat de la suma del doble d'aquest nombre i 5.

Exercici 139. Trobeu un nombre tal que dues vegades la suma d'aquest nombre més dos és igual a 4

Exercici 140. Quin nombre és tal que el doble de la suma d'aquest nombre més dos és igual a dotze vegades la resta d'aquest nombre menys 3?

Exercici 141. Quin és l'únic nombre tal que vuit vegades aquest nombre més el doble d'aquest nombre menys 4 és igual al doble de la resta d'aquest nombre menys 10?

Exercici 142. Quin és l'únic nombre tal que el triple d'aquest nombre menys 4 és igual al doble de la suma d'aquest nombre i dos?

2.2.4.4 Problemes de sumar objectes

Exercici 143. Na Maria té el doble d'anys que na Marta més 5. En Martí té la meitat dels anys de na Marta menys 5. Si la suma dels anys d'en Martí i de na Maria és 100, quants d'anys tenen na Marta, na Maria i en Martí?

Exercici 144. Tres amics van al cine. El primer contribueix amb el doble del que contribueix el segon més 2 euros. I el tercer contribueix amb la meitat del que contribueix el segon menys 6. En total, l'entrada costa 20 euros. Quant paga cadascú?

Exercici 145. No sabem l'edat d'en Miquel, però sabem que és la meitat que la de son pare més 5, i que la suma de les edats d'en Miquel i de son pare és igual a 75. Quina edat té cadascun?

Exercici 146. L'edat d'en Damià és la meitat que la de sa mare més cinc. La suma de les edats d'en Damià i de sa mare és igual a 80. Quina edat té cadascun?

Exercici 147. En Pau té el triple de l'edat d'en Joan més 20 anys. Si en Pau té 80 anys, quants d'anys té en Joan? Resoleu-ho emprant equacions.

Exercici 148. Na Júlia té els mateixos anys que na Francisca més dos. Si entre les dues sumen 28 anys, quina edat té cadascuna?

Exercici 149. Na Laura té el doble d'anys que na Catalina. I na Berta té els mateixos anys que na Catalina menys quatre. Si entre les tres sumen 36, quants anys té cadascuna?

Exercici 150. En Pep té el triple dels anys que té en Toni més 10. I na Laura té 20 anys. Quina edat té cadascú si la suma de les edats dels tres és igual a 70?

Exercici 151. Tres amics: n'Imma, na Berta i en Joan compten el nombre de monedes que tenen a la butxaca. Na Berta té el triple de monedes que n'Imma. I en Joan té el doble de monedes que n'Imma més 15. Si la suma de les monedes dels tres amics és igual a 55, quantes monedes té cadascú?

Exercici 152. En Carles té el doble de l'edat de na Pepita. I na Sebastiana té el triple d'anys que en Carles més 10. Quina edat té cadascú si la suma de les edats és exactament d'un segle?

Exercici 153. En Bernat té la meitat de l'edat que té na Paula, més 2. I na Loli té el doble d'anys que na Paula, menys 6. Quina edat té cadascú si sumen 38 anys?

Exercici 154. N'Alexandre té dos anys més que la seva dona. La dona de n'Andreu té dos anys menys que la dona de n'Alexandre. I n'Andreu té el doble dels anys

que té n'Alexandre. Si sabem que la suma de les edats del matrimoni-Alexandre és igual la meitat de la suma de les edats del matrimoni-Andreu, més 10 anys, quina edat té cadascú?

Exercici 155. Es pensen tres nombres: el primer és igual al segon més 20. I el tercer és igual a la meitat de la suma del primer i el segon. Si sabem que la suma del primer més el segon és igual al tercer, més 20, quins són aquests nombres?

Exercici 156. Na Laura té el triple de l'edat de n'Antònia, més 4. I en Joan té la suma de les edats de na Laura i n'Antònia. Quina edat té cadascú si la suma de les tres edats és igual a 88?

Exercici 157. Na Lluïsa té el doble de l'edat de na Laura, més 8 anys. I n'Inès té la suma dels anys de na Laura i na Lluïsa. Quina edat té cadascuna si la suma de l'edat de na Lluïsa i n'Inès és igual a l'edat de sis vegades l'edat de na Lluïsa, més 6?

Exercici 158. Hi havia una oferta i ens regalaven per cada llibreta comprada 2 gomes, 3 llàpissos i 1 bolígraf. Quantes llibretes hem comprat si en total ens hem endut 490 objectes?

Exercici 159. Som tres amics. Cadascú té un nombre de monedes a la butxaca, i volem saber quin és. L'únic que sabem és que:

- Na Laura té deu vegades més monedes que en Joan.
- En Francesc té dues vegades les monedes que té en Joan menys 2
- La suma de les monedes d'en Joan, en Francesc i na Laura és 63

Quantes monedes té cadascú?

Exercici 160. Tenc el doble d'anys més un que el meu amic, i entre els dos sumam 70 anys. Quants d'anys té cadascú?

Exercici 161. Na Martina, n'Enric i na Sònia van a sopar. A l'hora de pagar, decideixen que n'Enric pagui el doble del que paga na Martina més 2 euros i na Sònia pagui un euro més que na Martina. Si el sopar costa 203 euros, què paga cadascú?

Exercici 162. Tres amics: n'Imma, na Berta i en Joan compten el nombre de monedes que tenen a la butxaca. Na Berta té el triple de monedes que n'Imma més 2. I en Joan té el doble de monedes que na Berta més 10. Si la suma de les monedes dels tres amics és igual a 66, quantes monedes té cadascú?

Exercici 163. Tres amics van al cine. El primer contribueix amb el doble del que contribueix el segon, més 2 euros. I el tercer contribueix amb el doble de la suma de

la contribució del primer i del segon. En total, l'entrada costa 24 euros. Quant paga cadascú?

Exercici 164. Tres socis es reparteixen els beneficis segon el capital aportat. El primer se'n duu el doble del que se'n duu el segon, més 2000 euros. I el tercer se'n duu el triple del que se'n duu el primer, més 20 000 euros. Què se'n duu cadascun si en total s'han de repartir 118 000 euros?

Exercici 165. La meva germana té un any menys que jo i el meu germà el doble de la meva edat, més un. Si dues vegades l'edat de la meva germana més tres vegades l'edat del meu germà és igual a nou vegades la meva edat, menys deu, ¿quina edat té cadascú?

Exercici 166. Na Laura té la meitat dels anys de na Jèssica més 5, i na Magdalena en té 20. Quina edat té cadascú si la suma de les edats dels tres és igual a 55?

Exercici 167. Na Marina té el doble d'anys que na Margalida. I n'Antònia té la meitat de la suma de les edats de na Margalida i na Marina. Si dues vegades la diferència entre els anys de na Marina i na Margalida és igual a l'edat de n'Antònia més 5, quina edat té cadascuna?

Exercici 168. Na Laura té el doble dels anys d'en Guillem, més 10 anys. I en Antoni té el triple dels anys de na Laura. Si la suma de les edats és de 130, quants anys té cadascú?

2.2.4.5 Problemes de passar objectes

Exercici 169. A la butxaca tenia un nombre indeterminat de caniques. Li en vaig donar 7 a un amic meu i me'n varen quedar la meitat del que tenia. Quantes caniques tenia?

Exercici 170. Quantes monedes tenc a la butxaca si sé que si n'hi donc 20 a un company, me'n queden un terç del que tenia més 2?

Exercici 171. Hi ha 26 persones que estan dividides en dos grups: grup A i grup B . Volem saber el nombre de persones que estan al grup A i l'únic que sabem és que si se'n van 4 persones del grup A al grup B , aleshores hi haurà el mateix nombre de persones als dos grups.

Exercici 172. En Pep i jo tenim respectivament 10 i 20 euros. Quants d'euros he de donar a en Pep per a què jo tenguí els mateixos euros que en Pep més 5?

Exercici 173. Hi ha dos grups: grup A i grup B , que tenen 20 i 43 persones, respectivament. Quantes persones han de passar del grup B al grup A per a què després hi hagi en A la meitat de persones que a B ?

Exercici 174. En Vicenç té 20 bolis. I na Laura en té 16. Quants de bolis ha de donar en Vicenç a na Laura per a què na Laura tenguí dos bolis més que en Vicenç?

Exercici 175. En un vaixell hi ha 30 homes. En un altre n'hi ha 100. Quants d'homes han de passar del segon a primer per a què el segon tenguí la meitat de tripulació del primer, més 10?

Exercici 176. En una gàbia tenc 50 gallines i en una altra 110. Quantes gallines he de passar de la primer a la segona per a què en la segona tenguí set vegades més de gallines que en la primera?

Exercici 177. En la butxaca esquerra tenc vint-i-cinc euros i en la dreta, cent trenta-cinc. Quants d'euros he de passar de la primer a la segona per a què la segona tenguí nou vegades més que la primera?

Exercici 178. Na Sònia té 25 anys i na Raquel en té 15. Quants d'anys han de passar per a què na Raquel tenguí la meitat dels anys que tindrà na Sònia?

Exercici 179. En una gàbia tenc 50 gallines i en una altra 15. Quantes gallines he de passar de la primer a la segona per a què en la segona tenguí el doble de gallines que en la primera, més 5?

Exercici 180. Al pati tenim dues fileres d'alumnes: la primera de 30 i la segona de 45 alumnes. Quants alumnes han de passar de la segona a la primera per a què en la segona filera hi hagi exactament un alumne més que a la primera filera?

Exercici 181. En Lluís té dos munts de papers: en el primer té 25 fulls mentres que en el segon en té 56. Quants de fulls del primer al segon ha de passar per a què al primer munt tenguí exactament un quart dels fulls que tenguí al segon munt, més 1?

Exercici 182. Tenim dos petrolers: el primer transporta el triple del que transporta el primer, més 200 l. En un moment determinat, el primer petrolier passa 5000 litres al segon. Si en aquest moment, sabem que el primer petrolier transporta el doble de litres que el primer, menys 2800 litres, ¿quina quantitat de litres transportaven originàriament cada petrolier?

Exercici 183. Tenc dues butxaques: la dreta i l'esquerra, amb 20 i 44 monedes respectivament. ¿Quantes monedes he de passar de la butxaca esquerra a la dreta per a què el nombre de monedes de la butxaca esquerra sigui el triple de les monedes que tenc a la butxaca dreta menys 42?

Exercici 184. La gent d'una classe o bé fa teatre o bé fa mecànica com a optativa. Hi ha 13 persones que fan teatre i 25 que fan mecànica. Quantes persones han de passar de la classe de mecànica a la de teatre per a què a la classe de mecànica hi hagi el doble de persones que a teatre menys 16?

Exercici 185. Hi ha dos grups: grup A i grup B , que tenen 20 i 43 persones, respectivament. Quantes persones han de passar del grup B al grup A per a què després hi hagi en B el doble de persones que a A ?

Exercici 186. El meu germà assegura que si li donc 22 euros, tindrà el doble del que té ara mateix menys un euro. Quants doblers té el meu germà ara?

Exercici 187. Tenim dos dipòsits: un amb 5 litres i l'altre amb 17 litres. Passam una quantitat desconeguda del segon al primer. Una vegada passats, els litres que hi ha al segon dipòsit són iguals als litres del primer dipòsit més dues vegades el que hem passat del segon al primer dipòsit. Quants de litres hem passat d'un a l'altre dipòsit?

Exercici 188. Tenim dos capses A i B amb 10 i 81 bombons cadacuna. Quants de bombons hem de passar de B a A per a què en A hi hagi la meitat dels bombons de B , més 1?

Exercici 189. A la classe de Matemàtiques hi ha 25 alumnes, mentres que a la classe de Ciències naturals n'hi ha 14. Quants d'alumnes han de passar de la classe de

Ciències naturals a la de Matemàtiques per a què, després del canvi, a la classe de Matemàtiques hi hagi el quintuple dels alumnes de la classe de Naturals, menys 3?

Exercici 190. Na Laura té un compte corrent amb 24000 euros, mentres que en Jaume en té un altre amb 12500 euros. Quants de doblers ha de donar na Laura a en Jaume per a què en Jaume tengui la meitat de la resta dels doblers de na Laura i 1500?

Exercici 191. A l'embassament de Cúber hi ha 125.000 m³ d'aigua, mentres que al Gorg Blau 335.000 m³. Quants metres cúbics hem de trasvassar del Gorg Blau a Cúber per a què la diferència dels litres del Gorg Blau menys els litres de Cúber sigui 200 metres cúbics?

Exercici 192. En Lluís té 25 CD i na Sònia 34. Quants de CD ha de donar na Sònia a en Lluís per a què en Lluís tengui els CD que tindrà na Sònia més la suma de la quantitat de CD que li ha donat na Sònia i 2?

Exercici 193. Tenim tres fileres: A de 15 persones, B de 25 persones i C de 40 persones. Es produeix un canvi: passen un nombre indeterminat de persones de C a A . Després d'aquest canvi, sabem que la suma del nombre de persones de B i C és igual al doble de les persones A , menys 10. ¿Quantes persones s'han canviat de filera?

Exercici 194. Al grup A hi ha el doble de persones del grup B , menys 3. Es produeix un canvi: se'n van 15 persones de B a A . Deprés del canvi, sabem que el doble de les persones que hi ha a A més les persones que hi ha a B és igual a 109, ¿quantes persones hi havia originàriament a cada grup?

Exercici 195. Tenc el doble de caniques que la meva germana. Si me'n dóna 10, llavors tindrè el cinc monedes més que la meva germana. Quantes monedes teníem cadascú?

Exercici 196. A la butxaca esquerra tenc el triple de monedes que a la butxaca dreta, més 5. Pas la meitat de les monedes que tenc a la butxaca dreta a la butxaca esquerra. Si, després d'aquesta passada, la suma de les monedes de la butxaca esquerra i la butxaca dreta és igual a 45, quantes monedes tenc a cada butxaca?

Exercici 197. En Robert té la meitat de les monedes de na Berta. Si na Berta li dóna un terç, llavors en Robert tindrà el triple de monedes que na Berta, més 10. Quantes monedes tenien originàriament?

Exercici 198. En Pau té el triple de les accions que té en Llorenç. Si en Llorenç li dóna un terç de les accions que té, llavors en Llorenç tindrà una cinquena part de les accions que tindrà en Llorenç. Quantes accions tenien originàriament?

Exercici 199. A la butxaca esquerra tenc 10 monedes i a la dreta 20. Quantes monedes he de passar de la butxaca esquerra a la dreta per a què a la dreta tengui el quadruple de monedes de l'esquerra, més 5.

Solucions de “Problemes”

- Exercici 93: la base fa 50 cm i l'al-
tura, 80 cm
 - Exercici 122: 5
 - Exercici 123: 7
 - Exercici 124: 10 i 23
 - Exercici 125: 12
 - Exercici 126: 24
 - Exercici 127: 10
 - Exercici 139: 0
 - Exercici 141: -2
 - Exercici 142: 8
 - Exercici 146: en Damià en té 30 i
la seva mare, 50
 - Exercici 152: 10, 20 i 70
 - Exercici 153: 8, 12, 18
 - Exercici 154: D: 20, A: 22, DJ: 20,
J: 44
 - Exercici 157: na Lluïsa té 10 anys
 - Exercici 162: 5, 17 i 44
 - Exercici 163: el primer, 6 euros; el
segon, 2 €; i el tercer, 16 euros
 - Exercici 164: el segon se'n duu 10.000
€
 - Exercici 165: Jo tenc 11 anys
 - Exercici 166: 15, 20 i 20
 - Exercici 167: 20, 10 i 15
 - Exercici 168: en Guillem té 10 anys
 - Exercici 174: 3
 - Exercici 175: 50
 - Exercici 176: 30
 - Exercici 177: 10
 - Exercici 178: 5
 - Exercici 179: 30
 - Exercici 181: 8
 - Exercici 182: 36.200 i 12.000
 - Exercici 185: 3
 - Exercici 188: 21
 - Exercici 189: 7
 - Exercici 190: 2500
 - Exercici 191: 5
 - Exercici 192: 11
 - Exercici 193: 15
 - Exercici 194: $A = 27$, $B = 20$
 - Exercici 195: 15 i 30
 - Exercici 197: 60 i 30
 - Exercici 198: 15 i 45
 - Exercici 199: 5
-

3 Funcions

3.1 Representació gràfica

3.1.1 Pla cartesià

Exercici 200. (a.) Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 4)$, $B = (4, 1)$, $C = (-5, 2)$, $D = (-3, -1)$, $E = (6, -3)$, $F = (0, 2)$, $G = (-2, 0)$, $H =$ origen de coordenades, i (b.) digueu a quin quadrant pertanyen.

Exercici 201. Escriviu les coordenades dels punts següents (figura 3.1):

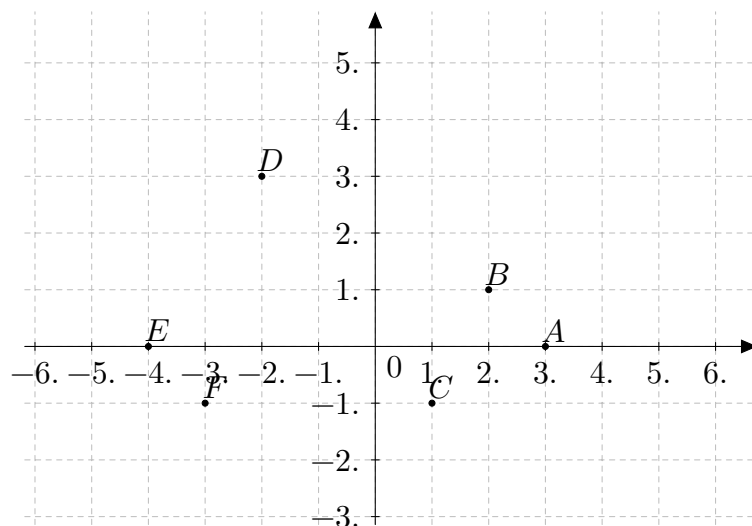


Figura 3.1 Punts al pla cartesià

Exercici 202. Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $C = (1, 1)$, $D = (2, 2)$, $E = (-1, 2)$, $F = (0, 2)$, $G = (1, 0)$, $H = (0, 0)$, $I = (-2, -3)$. Digueu a quin quadrant pertanyen

Exercici 203. Quines coordenades tenen els punts següents (figura 3.2):

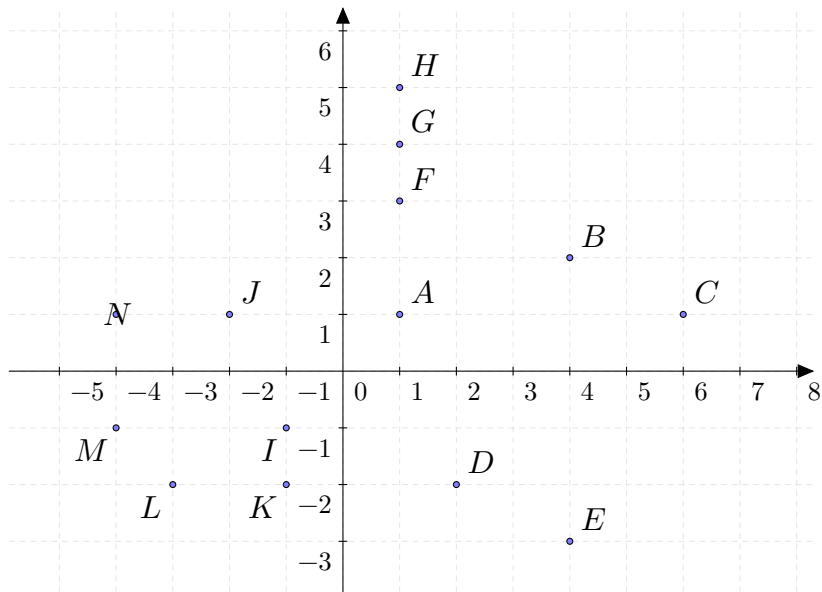


Figura 3.2 Punts al pla cartesià

Exercici 204. Representeu al pla cartesià els punts següents i digueu a quin quadrant pertanyen: $A = (5, 6)$, $B = (-3, 4)$, $C = (7, -3)$, $D = (-1, -5)$, $E = (0, -2)$, i $F =$ origen de coordenades.

Exercici 205.

- Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $C = (-3, 2)$, $D = (-4, -1)$, $E = (2, -3)$, $F = (0, 3)$, $G = (-2, 0)$, $H =$ origen de coordenades
- Digueu a quin quadrant pertanyen

3.1.2 Representació de funcions

Exercici 206. Representeu gràficament:

- $y = 3x - 9$
- $y = 2x + 1$
- $y = 10/x$

- d. $y = x^2 - 2$ f. $y = x - 2$ h. $y = 3x + 6$
 e. $y = 60/(x + 1)$ g. $y = x^2 - x$ i. $y = \sqrt{x} + 2$

Exercici 207. Representeu gràficament les funcions següents:

- a. $2x^2 + 4y = 12$ b. $8x - 5y = 10$ c. $x \cdot y = -30$

Exercici 208. Quines de les funcions següents donen lloc a rectes i quines no:

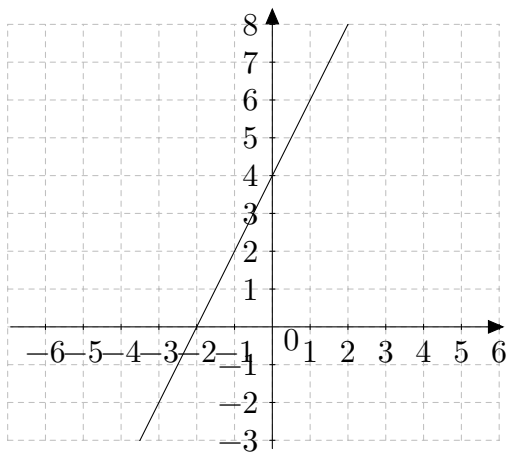
- a. $y = 2x - 4$ g. $y = 0,5x$ k. $y = x^3 - 3$
 b. $y = 2x$ h. $y = \frac{x}{x} + 1$ l. $3x - 5y = 2x + 2$
 c. $y = 2$ i. $y = \frac{2x^2}{x} + 1$ m. $6x - 10y + x^2 = 2y + x^2$
 d. $y = -x - 2$ j. $y = \frac{5}{x} - 3$ n. $x = 2y - 3$
 e. $y = x^2$ o. $2y + x = 3y - 3x$
 f. $y = \frac{x}{2}$

Exercici 209. Digueu si les gràfiques corresponents a les funcions següents són creixents o decreixents. Com ho sabeu?

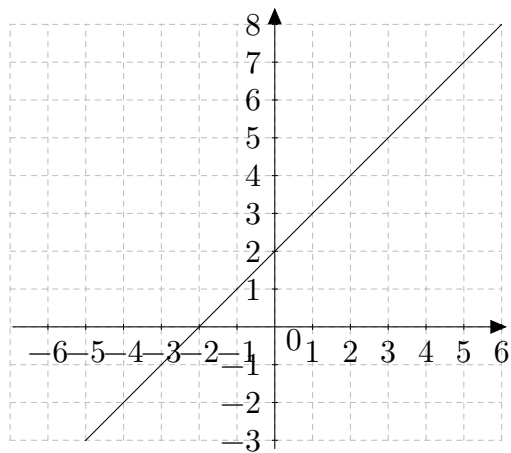
- a. $y = 2x + 4$ e. $y = -2$ h. $y = \frac{x}{3} + 2$
 b. $y = -2x + 4$ f. $y = -2x$
 c. $y = 2x - 4$ g. $y = -4$ i. $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{5}$
 d. $y = -2x - 4$

Exercici 210. Representeu gràficament les funcions de l'exercici anterior (exercici 209).

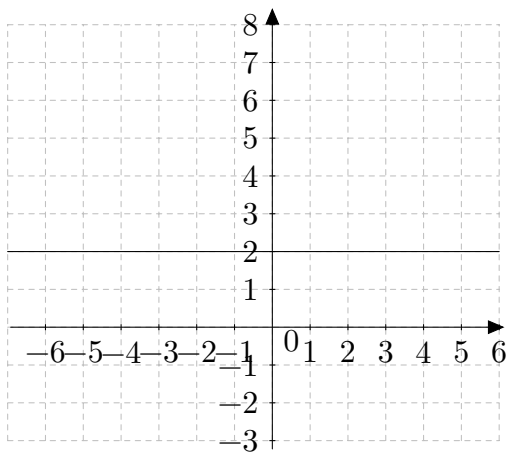
Exercici 211. Identifiqueu el gràfic amb la fórmula corresponent: (a.) $y = x + 2$ (b.) $y = 2x + 4$ (c.) $y = 2x$ (d.) $y = -x + 2$ Digueu el motiu d'aquesta identificació. Gràfiques:



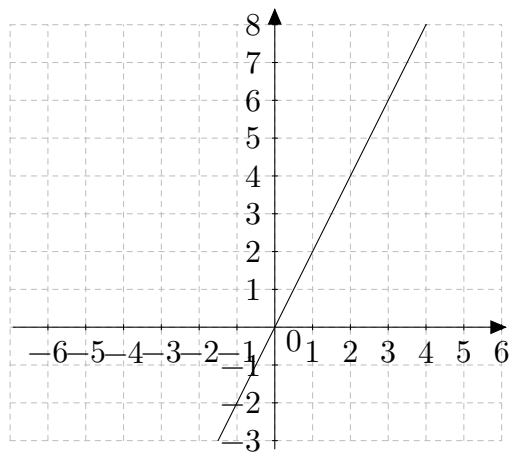
a



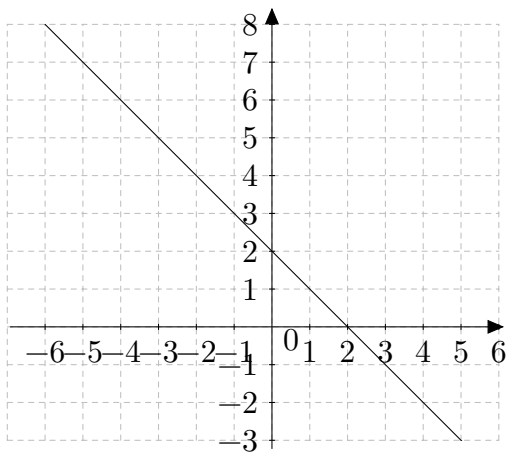
b



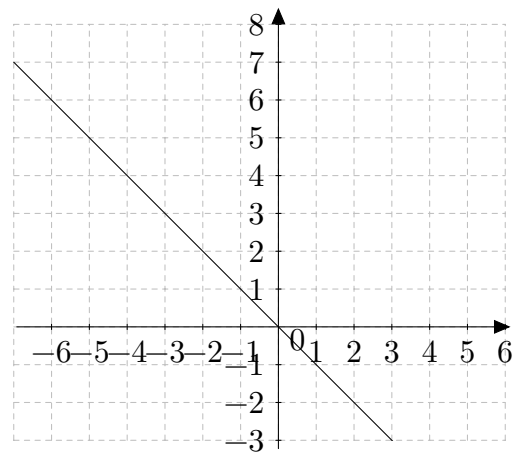
c



d



e



f

Quines fórmules tenen els gràfics que no estan emparellats amb cap fórmula anterior?

Exercici 212. Identifiqueu el gràfic amb la seva fórmula:

Fórmules:

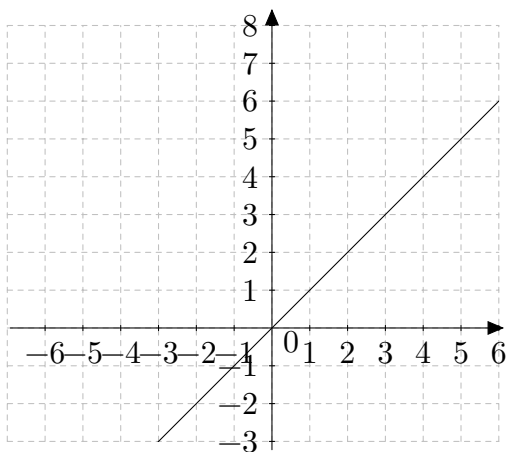
a. $y = x$

b. $y = 2x$

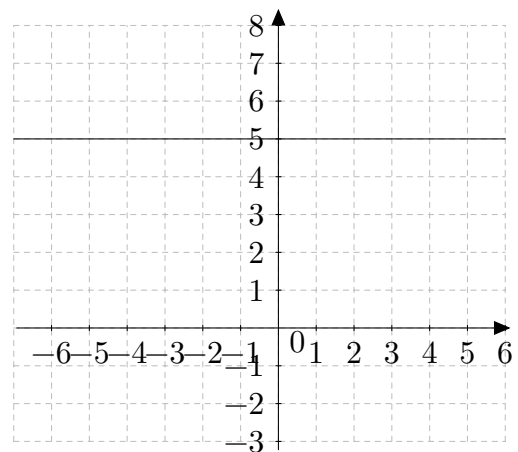
c. $y = 5$

d. $y = -x + 1$

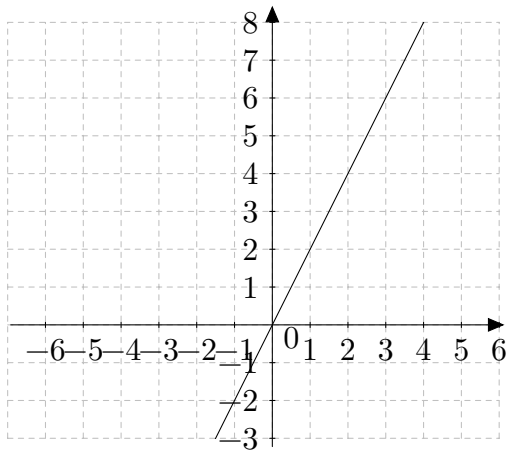
Gràfiques:



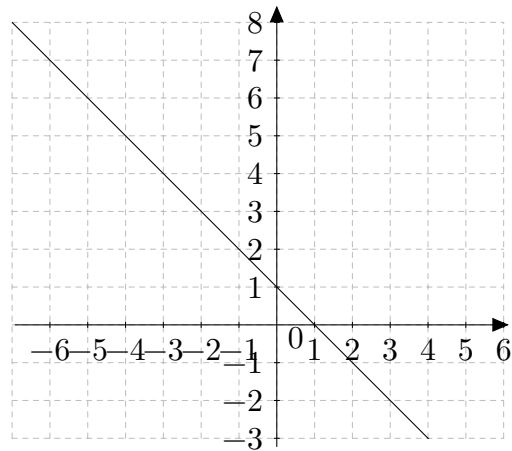
a



b



c



d

Exercici 213. Quina fórmula dóna lloc a una recta amb major pendent? Per què? Quina creix i quina decreix?

- (a.) $y = 2x + 3$, (b.) $y = 4x + 3$
- (a.) $y = 5x + 10$, (b.) $y = 5x + 20$
- (a.) $y = -5x + 12$, (b.) $y = 5x + 12$
- (a.) $y = 20x + 100$, (b.) $y = 20x$, (c.) $y = -20x$, (d.) $y = 10x + 200$

3.2 Modelització

3.2.1 Funcions lineals

Exercici 214. Un model de cotxe determinat consumeix 20 litres cada 100 quilòmetres.

- Trobeu la relació que hi ha entre el nombre de quilòmetres recorreguts i els litres consumits
- Digueu quina és la variable dependent i la variable independent
- Feis la seva representació gràfica

- d. Quants de litres s'haurien d'haver posat al dipòsit per recórrer 224 km?
- e. Si en el dipòsit hi hagués 24 litres, quina distància es podria recórrer?

Exercici 215. 2,5 metres de tela costen 48 €. Trobeu una fórmula que relacioni el nombre de metres de tela que es compren i els euros que costen. Representeu-la gràficament

Exercici 216. Representeu gràficament la relació que existeix entre el nombre de cavalls a una granja i el nombre de pinso que mengen si sabem que 12 cavalls mengen 100 quilògrams de pinso.

Exercici 217. Per fer un pastís, necessitam 250 g de farina per a cada 100 g de sucre.

- a) Quina relació hi ha entre els grams de sucre i els grams de farina. Expressau aquesta relació amb una expressió algebraica
- b) Representeu gràficament aquesta relació
- c) Quina és la variable dependent i la variable independent?
- d) Què es necessitaria per fer una coca amb 400 g, 300 g i 1000 g de sucre?

Exercici 218. Per fer la massa del pa, per a cada dos quilògrams de farina hem de posar 500 ml d'aigua.

- a) Quina relació existeix entre els litres d'aigua i els quilògrams de farina de la massa de pa?
- b) Quina és la variable dependent i la variable independent?
- c) Trobeu la representació gràfica

Exercici 219. (canvi €-\$) Els euros i els dòlars són monedes. A dia d'avui, 1 euro equival a 1,36 dòlars.

- a. Feis una gràfica que relacioni els euros i els dòlars. Com a mínim representeu 8 punts.
- b. Es poden unir els punts de la gràfica? Raoneu la resposta.

Exercici 220. (batecs) Quantes vegades batega el cor d'una persona al llarg de la seva vida? En quin moment s'arriba als 10.000 batecs? Nota: podeu aproximar el nombre de batecs per minut, mesurant el vostres batecs per minut.

Exercici 221. (batecs 2) Podríeu refinar la vostra estimació de l'exercici 220 sobre quan s'arriba als 10.000 batecs emprant la fórmula de Haskell-Fox del nombre de batecs màxim (HR) que una persona pot tenir?

$$HR = 220 - \text{edat}$$

3.2.2 Funcions afins

Exercici 222. (capses de xocolata) N'Estefania està ajudant a la banda de música dels seus amics a recaptar diners per a fer una gira. El grup decideix vendre tabletetes de xocolata. Cada tableta es ven per 1,50 € i cada caixa conté 20 tabletetes. D'altra banda, cada caixa els costa 0,20 €.

- Existeix una relació entre el nombre de capses venudes i els diners recaptats?
- Feis el gràfic que relaciona aquestes dues quantitats?
- Calculeu quants de diners s'hauran recaptat si es venen 100 capses de xocolata
- Al final la banda ha recaptat 2.831 €. Quantes capses han venut?

Exercici 223. (capses de xocolata 2) La banda de l'exercici anterior (exercici 222) decideix canviar de proveïdor: ara cada capsa els costa 0,10 €, però decideixen abaixar el preu de la tableta fins a 1,10 €. Guanyaran més o menys?

Exercici 224. (clics) Els ingressos de la pàgina `www.matematiques.org` són deguts als conceptes següents:

- 10 euros al mes fixes, degut a l'aportació dels fundadors
- 0,32 euros per cada clic sobre la publicitat de la pàgina

Quina funció relaciona el nombre de clics sobre la publicitat de la pàgina i els ingressos? Si els ingressos de la pàgina han estat de 458 €, quants de clics s'han fet a la pàgina?

Exercici 225. (factura del gas) En la factura del gas d'una ciutat es paga una quantitat fixa de 15 €, i 0,75 € per a cada metre cúbic consumit. (a.) Quan es paga per 3 m³? I per 5 m³? (b.) Representeu la funció metres cúbics consumits-cost (c.) Quina és la variable dependent i independent? (d.) Què s'hagués consumit si s'hagués pagat 200 €?

Exercici 226. (anunci per paraules) Un anunci per paraules en un diari costa 0,80 € per paraula, i s'estableix un mínim de cinc paraules per a poder ser admés.

- Elaboreu una taula i una gràfica de la funció que relaciona el nombre de paraules amb el preu de l'anunci.
- Quines són les variables del gràfic?
- Quantes paraules s'han d'emprar en un anunci per a què costi 20 €?

Exercici 227. (cridada telèfon) Per fer una cridada de telèfon tenim els costos següents:

- Simplement per l'establiment de cridada, 1,50 euros
- Per cada minut, 0,320 euros

Trobeu la funció que relaciona el cost d'una cridada de telèfon i el número de minuts que conversam. Quants minuts podríem parlar si tenguéssim 20 €?

Exercici 228. (una granja de vaques) En una granja, tenim que:

- Les despeses fixes (llum, telèfon, etc) representen 240 euros
- Dotze vaques mengen 450 kg de pinso al mes

Tenint en compte que un kg de pinso val 1,32 €, calculeu la funció que relaciona les despeses en el mes i el número de vaques de la granja.

- Si tenim 250 vaques, quines despeses tendrem?
- Si volem que els costos de la granja com a màxim siguin 10.000 €, quantes vaques podríem tenir?

Exercici 229. (vins d'Oporto) En aquesta carta de vins d'Oporto (figura 3.3), tenim el darrer preu tapat:

- Quin és el darrer preu? Es pot establir de qualque manera?
- Què valdria un vi que tingués 42 anys? I un vi de 137?
- Es pot establir una fórmula que relacioni els anys i el preu del vi?
- Podeu saber quants anys tindrà un vi que costi 25€?

Exercici 230. (dilatació) La longitud L d'una barra de metall és una funció lineal en funció de la temperatura T , on L es mesura en centímetres i T en graus Celsius. S'han realitzat les mesures següents: $L = 124,91$ quan $T = 0$, i $L = 125,11$ quan $T = 100$.

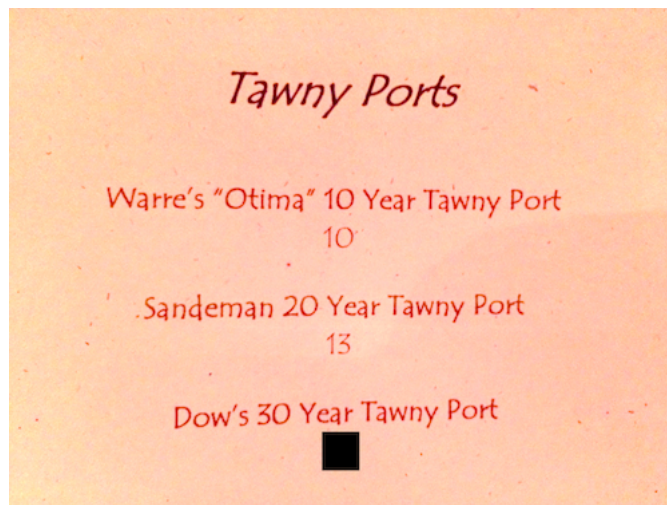


Figura 3.3 Carta de vins (en anglès)

- Trobeu una fórmula que doni L en funció de T .
- Quina serà la longitud de la barra quan la temperatura sigui de 20° ?
- A quina temperatura s'hauria d'encalenticir la barra per a què fes 125,17 cm de llarg?

Exercici 231. (predicció dels cotxes) Sabem que l'any 2012, es varen vendre 20.000 cotxes a un concessionari, i que l'any 2014, es varen vendre 40.000.

- Podeu saber quants cotxes es vendran l'any 2020?
- Aproximeu el nombre de cotxes venuts l'any 2010
- Si segueix aquest ritme, hi haurà algun any en que el nombre de cotxes venuts sobrepassi el milió?

Exercici 232. (nàufrag) Un nàufrag decideix intentar partir de la illa on està. Si va a una velocitat de 2 m/s amb una balsa, quina funció relaciona el temps que passa i la distància a la que es troba de la illa? Representeu-la gràficament.

Abans de partir, el nàufrag veu un vaixell a la deriva a 200 metres que, segons els seus càlculs, va a una velocitat de 1 m/s. Serà capaç d'agafar el vaixell en algun moment? Si la resposta és afirmativa, quan?

Exercici 233. (manteniment del jardí) Per pagar el manteniment del jardí d'una comunitat de veïns, hem de pagar 100 € al mes fixes i 10 euros per hora treballada. Què ens costarà al mes en funció de les hores que hi fan feina?

Exercici 234. (preus de l'autoescola) En l'autoescola Ramírez les tarifes són les següents:

Preu de cada classe	15 €
Preu de la matrícula	150 €

- a) Si hem utilitzat els serveis de Ramírez i amb 5 classes hem obtingut el carnet. Què hem pagat?
- b) Quan haguéssim pagat si haguéssim fet 6 classes? I amb 7 classes?
- c) Feis una gràfica que relacioni el que costa obtenir el carnet segons el nombre de classes rebudes
- d) Si volem gastar com a màxim 2000 €, quantes classes podrem fer?

3.2.3 Comparativa de productes

Exercici 235. (repartidors de publicitat) En Joan i n'Albert firmen un contracte per repartir publicitat. En Joan cobra 20 € al dia fixes i 0,2 € per a cada fulla repartida. N'Albert cobra 10 euros per dia fixes i 0,3 € per a cada fulla.

- a) Expressseu què guanyaran en Joan i n'Albert amb una fórmula
- b) Qui guanyarà més?

Exercici 236. (cartutxos de tinta) En el mercat hi ha dues classes d'impressores:

IMPRESSORA A	IMPRESSORA B
Cost impressora..... 70 €	Cost impressora..... 40 €
Cartutx (20 ml).....10 €	Cartutx (10 ml).....20 €

Taula 3.1 Costos de les impressores

Quina impressora és més cara? (podeu suposar que gasten el mateix, és a dir, que el podeu imprimir el mateix nombre de folis amb la mateixa quantitat de tinta)

Exercici 237. (cartes al banc) El banc ens cobra 0,60 € cada any de manteniment de la llibreta més un 0,01€ per cada carta que ens envien. Com canvia el que ens

cobren en funció del nombre de cartes? Si un altre banc ens cobra 0,20 € cada any per manteniment i 0,05€/carta enviada, a quin banc ficaríem els doblers?

Exercici 238. (companyies de telèfon) La companyia de telèfons mòbils Wififone cobra 0,10 € per establiment de cridada i 0,02 € per segon, mentres que la companyia Telephone en cobra 0,20 per establiment de crida i 0,01 € per segon.

- Trobeu la fórmula que permet saber què pagam per segon parlat en cada companyia
- Quina és la variable dependent i la independent?
- Com varia el cost al llarg del temps?

Exercici 239. (discoteca) Per anar a una discoteca ens cobren 10 € a l'entrada i 3 € per consumició. Per quan *ens sortirà* la nit en funció del nombre de beures?. Representeu-ho gràficament
Serà aquesta discoteca més barata que una altra que només ens cobra 20 € d'entrada i tenim barra lliure?

Exercici 240. (jugador de futbol) Un jugador de futbol cobra:

- 10.000 euros per any
- 1.000 euros per a cada partit guanyat

Però el club de futbol li vol fer una oferta que cobri 15.000 l'any en total. Aquest jugador vos demana la vostra opinió. Quin consell li donaríeu?

Exercici 241. (companyies telefònica) La companyia de telèfons mòbils Rodafone cobra 0,10 euros per establiment de cridada i 0,02 € per segon, mentres que la companyia Elgo cobra 0,70 euros per establiment de cridada i 0,01 euros per segon.

- Trobeu la fórmula que permet saber què s'ha de pagar per segon parlat en cada companyia
- Quina és la variable dependent i quina la variable independent?
- Trobeu en quins trams la primera companyia és més cara que la segona.
- Quina companyia és més cara si parlem 3 minuts?

Exercici 242. (companyia telefònica) La companyia de telèfons mòbils Wififone cobra 0,05 € per establiment de cridada i 0,05 € per segon, mentres que la companyia Telephonic en cobra 0,30 per establiment de crida i 0,001 € per segon.

- Trobeu la fórmula que permet saber què pagam per segon parlat en cada companyia
- Quina és la variable dependent i la independent?
- Representeu gràficament cada funció

Exercici 243. (perímetres de rectangles) Tenim les figures següents:

- Un rectangle de base igual a cinc vegades l'altura.
- Un rectangle de base igual a dues vegades l'altura més deu.

Compareu els seus perímetres.

Exercici 244. (manteniment del jardí) Per pagar el manteniment del jardí d'una comunitat de veïns, es tenen dues ofertes de companyies diferents: amb la primera es paguen 100 euros al mes fixos i 10 euros per hora treballada dels operaris. Amb la segona, s'han de pagar 200 € fixos al mes i 5 euros per hora treballada.

- Trobeu com canvia el que es cobra en funció del nombre d'hores facturades
- Representeu les funcions gràficament
- Raoneu sobre quina oferta convendria més triar (suposant que, en tot moment, es tria l'oferta més barata)

Exercici 245. (els telegrams) Per enviar un telegrama, la web de Correus ens proporciona la informació següent (figura 2.2):

Envío de documentos



Régimen	Tarifa (€) IVA (€)		Precio final (€)
Régimen continental: comprendre los países de Europa, Turquía, Argelia, Egipto, Israel, Jordania, Líbano, Libia, Marruecos, Siria y Túnez			
• Por cada palabra (sin mínimo de percepción)	0,96	0,10	1,06
• Tarifa fija	29,54	3,10	32,64
Régimen intercontinental: comprendre los países no incluidos en el régimen continental y que admitan esta modalidad			
• Tarifa por palabra (con un mínimo de percepción por importe de siete palabras)	3,28	0,68	3,96

Taula 3.2 Transcripció de les tarifes 2014 de Correus

- a. Què és més barat, enviar un telegrama continental o intercontinental? De què depèn?
- b. Quan és exactament igual de car?

Exercici 246. (comissions del banc) Per fer un recàrrec a la *cibertargeta*, Caixabanc ens cobra de les comissions següents:

RECÀRREC DE LA CIBERTARGETA	
Menys de 100 €.....	1 €
100 € o més	un 1%

- a. Què ens cobrarien si haguéssim d'ingressar 20 €? I per 120 €?
- b. Què hem ingressat si ens han cobrat 23,5€?
- c. Quina quantitat ens convé més ingressar? Podeu representar gràficament la relació doblers ingressats-comissions per fer-vos-ne una idea.
- d. Podeu comparar-lo amb un altre banc que només cobràs 2 €, independentment de l'ingressat?

Solucions

- Exercici 229. Representeu gràficament la recta que passa per $(10, 10)$ i $(20, 13)$ i trobeu $f(30)$. Aquest seria el preu *lògic* de venda. La fórmula seria $f(x) = (x - 10) \cdot 3 + 10$.
- Exercici 231. L'any 2020, hi havia 100.000 cotxes, l'any 2013, 30.000 cotxes (la recta és $y = 10.000x - 20.100.000$). L'any 2110 es produiran un milió de cotxes

4 Estadística descriptiva

4.1 Introducció a l'Estadística

Activitat 247. (Espanya a Eurovisió) Quins resultats ha tengut Espanya a Eurovisió? Per respondre a aquesta pregunta hem de cercar les dades de la classificació d'Espanya durant la història d'Eurovisió¹ (figura 4.1):

Potser ens interressi respondre a les preguntes següents:

- a. Quantes vegades hem participat
- b. Quantes vegades hem quedat primer?
- c. Quantes vegades hem quedat darrer?
- d. Quina és la posició a la que normalment ens classifiquem?
- e. No totes les vegades tenia el mateix mèrit quedar al cap de la classificació: al principi hi havia molt menys països participants que al final. Podem calcular el *mèrit de la classificació* en cada any?

Per respondre a aquestes preguntes:

- a. Feis grups de 2 o 3 persones
- b. Discutiheu què heu de fer durant 10 minuts
- c. Poseu en comú les opinions consensuades

¹ El sistema de puntuació ha variat al llarg de la història i, per això, no els podem tenir en compte.

Any	Gènere interpret	Classificació	Participants	Any	Gènere interpret	Classificació	Participants
1961	D	9	16	1962	H	13	16
1963	H	12	16	1964	H	12	16
1965	D	15	18	1966	H	7	18
1967	H	6	17	1968	D	1	17
1969	D	1	16	1970	H	4	12
1971	D	2	18	1972	H	10	18
1973	D	2	17	1974	H	10	17
1975	D	10	19	1976	H	16	18
1977	H	9	18	1978	H	9	20
1979	D	2	19	1980	D	12	19
1981	H	14	20	1982	D	10	18
1983	D	20	20	1984	D	3	19
1985	D	15	19	1986	H	10	20
1987	D	19	22	1988	H	11	21
1989	D	6	22	1990	D	5	22
1991	H	4	22	1992	H	14	23
1993	D	11	25	1994	H	18	25
1995	D	2	23	1996	H	20	23
1997	H	6	25	1998	H	16	25
1999	D	23	23	2000	H	18	24
2001	H	6	23	2002	D	7	24
2003	D	8	26	2004	H	10	24
2005	D	21	24	2006	D	21	24
2007	H	20	24	2008	H	16	25
2009	D	23	25	2010	H	15	25
2011	D	23	25	2012	D	10	26
2013	D	25	26	2014	D	10	26

Taula 4.1 Classificació d'Espanya a Eurovisió des de 1961. Font [Wikipedia](#)

4.2 Població i mostra

Fins ara hem vist, més o menys, què és l'estadística: per analitzar una situació ens hem fet preguntes i les hem contestat ordenant, comptant i agrupant les dades. També hem calculat *paràmetres estadístics* (mitjana aritmètica i moda) que tenen un significat real en l'estudi.

Però l'estudi fet tenia dues particularitats:

- Ens donaven les dades (provenien d'una font externa)
- I, a més, el conjunt de les dades que teníem era igual al total de les dades a estudiar (la població era el conjunt de participacions d'Espanya a Eurovisió)

Ara bé, hi ha casos en què aquestes dues particularitats no es compleixen: (a.) és necessari fer una enquesta per a obtenir les dades a estudiar i (b.) és poc viable recollir totes la informació. Per això, l'enquesta es realitza a un conjunt reduït del total, que s'anomena *mostra*, a la que es fa l'enquesta.

Activitat 248. (Enquesta d'intenció de vot) Volem determinar quin partit guanyarà les pròximes eleccions. Per saber-ho hem de fer una enquesta. És impossible fer-la a totes les persones de Mallorca. Quan acabàssim, potser ja s'haurien celebrat les eleccions! (nota: calculeu què tardaríeu!).

- Quines preguntes faríeu?
- Com triaríeu les persones a enquestar? Quantes en triaríeu?
- Una vegada demanades les preguntes, quin seria el pròxim pas?

Activitat 249. (Nombre de televisors) Si volem saber la quantitat de televisors que es tenen a les llars de Mallorca, quin tipus d'enquesta heu de fer?

4.2.1 Població i mostra

L'*estadística* és la part de les matemàtiques que s'encarrega de recopilar, ordenar, i agrupar les dades de diversos objectes a estudiar i, posteriorment, a interpretar-les. Per interpretar les dades es fan ús de gràfiques i càlcul de diversos paràmetres (per exemple la mitjana aritmètica).

Població:	Són <i>tots</i> els elements que són objecte d'estudi
Mostra:	La <i>part</i> de la població de la qual recopilem les dades i estudiam. Poques vegades coincideix amb la població. Una bona mostra necessita ser suficientment heterogènia per a poder representar la població. Es pot determinar el tamany mínim necessari per a què una mostra tingui la representativitat necessària amb un marge d'error.
Grandària:	<i>Nombre</i> d'elements de la població o de la mostra.
Variable estadística:	Cadascuna de les <i>propietats</i> o característiques que volem estudiar d'un conjunt de dades.

Existeixen dues branques de l'estadística:

- L'*estadística descriptiva*, que simplement descriu i interpreta les característiques del grup d'estudi, tal com és. Fa un *retrat* de la població.
- L'*estadística inferencial* que intenta fer prediccions i justificar que la mostra s'adeqüa a la població, de manera que les característiques de la mostra siguin les mateixes que les característiques de la població.

Exemple 1. Volem fer una enquesta entre totes les persones residents de Mallorca per saber quin peu calcen. Com que no es factible fer l'enquesta a tots els habitants (són més de 800.000 persones) es tria a 1000 persones a l'atzar en una enquesta telefònica.

Població:	Habitants de Mallorca
Mostra:	Cent persones triades aleatòriament i enquestades telefònicament
Grandària:	Grandària de la població: 873.414 Grandària de la mostra: 100
Variable estadística:	Nombre de sabata

Exercici 250. Volem fer un estudi estadístic de la talla de calçat que usen els alumnes de 3r d'ESO d'un institut.

- a. Quina seria la població?
- b. Tria'n una mostra. Quina grandària té?
- c. Trobes que la teva mostra és una *bona* mostra, o sigui, que representa l'ins-titut?

Exercici 251. Assenyala en quin cas és més convenient estudiar la població sencera o una mostra:

- a. La longitud dels pernys que, sense interrupció, produeix una màquina
- b. L'estatura de tots els turistes en un any
- c. El pes d'un grup de cinc amics

Exercici 252. El titular d'un diari és "El pes mitjà dels espanyols és de 69 kg"

- a. Com creus que s'ha arribat a aquesta conclusió? Quina mostra s'ha pres?
- b. Quines característiques ha de tenir la mostra? Podrien ser tots els individus de la mateixa edat? Si tots són dones, seria correcte la mostra?

Exercici 253. Volem fer un estudi del nombre d'hores que els alumnes dediquen a la lectura

- a. Tria'n una mostra
- b. Quina grandària té la mostra?
- c. Quina és la població

Exercici 254. Si es vol fer un estudi estadístic de la talla de calçat que usen els alumnes d'ESPA del CEPA Sud:

- a. Quina seria la població?
- b. Tria'n una mostra. Quina grandària té?

Exercici 255. Quines poblacions i mostres correspondrien si intentéssim donar res-
posta a les preguntes següents:

- a. Quantes bombetes defectuoses hi ha a una fàbrica?
- b. Quina és la intenció de vot de les pròximes eleccions?

Exercici 256. Què passa si es menteix a una enquesta? Reflexioneu sobre en quines de les afirmacions següents esteu d'acord:

- a. A les enquestes no es menteix. Les persones sempre diuen la veritat
- b. Un bon enquestador detecta si l'enquestat menteix

- c. En cas de detectar que un enquestat menteix. aquest s'ha d'eliminar de l'enquesta
- d. Les persones que menteixen a una enquesta són la minoria. Per tant, no són importants
- e. Les mentides es compensen: si un enquestat diu B quan realment pensa A , potser un altre enquestat dirà A quan pensa B . L'estadística juga a què, a grans trets, aquestes trampes es compensen

Exercici 257. Indiqueu quan la població coincideix amb la mostra i quan no. Raoneu la resposta:

- a. Rendiment d'un esportista
- b. Enquestes electorals
- c. Notes dels exàmens d'un grup de persones
- d. Registres meteorològics
- e. Gols per partit d'un equip de futbol
- f. Cens de població (característiques de la població d'una determinada regió)
- g. Enquestes d'opinió
- h. Nombres que surten a la loteria
- i. Estudi del *perfil* de les persones que fan una certa activitat (per exemple, que utilitzen el Facebook™)

4.2.2 Tipus de variables estadístiques

Tipus	Propietats	Exemples
Qualitatives	Els valors de la variable no són nombres sinó <i>qualitats</i>	Sexe (home/dona), color dels cabells (ros, moreno, ...)
Quantitatives	Els valors que pren la variable són <i>nombres</i> . N'hi ha de: <ul style="list-style-type: none"> • discretes • contínues 	Pes, nombre de germans, etc.

Tipus	Propietats	Exemples
Discretes (quantitatives)	En cada tram, la variable només pot prendre en nombre de valors <i>finit</i>	Nombre d'amics (pot ser 1, 2, 3, ... però no 2,5)
Contínues (quantitatives)	Entre dos valors qualsevols, la variable pot prendre <i>tots els valors</i> ²	Estatura dels habitants de Campos (entre 1,70 i 1,80 hi ha 1,75, 1,715, etc.)

Exemple 2. Exemples de tipus de variables són

- Variable qualitativa: mes de naixement, carrer en què es viu, marca de cotxe, partit polític, major o menor d'edat, etc.
- Variable quantitativa discreta: edat, nombre de fills, nombre de llançaments triples en un partit de bàsquet, talla de pantalons, etc.
- Variable quantitativa contínua: pes, temps emprat per a realitzar una tasca, velocitat, etc.

Exercici 258. En un partit de bàsquet, digues 5 variables estadístiques que hi apareguin. Almenys una de cada classe.

Exercici 259. Determina el tipus de variable estadística:

- Any de naixement
- Color dels cabells
- Professió d'una persona
- Perímetre toràcic
- Estat civil
- Perímetre de la cintura
- Pes del cervell
- Nombre de vegades que ha viatjat en avió

Exercici 260. Classifica aquestes variables segons el tipus:

- Comunitat autònoma de residència
- Nombre de veïnats d'un edifici
- Professió del pare
- Consum de benzina cada 100 km d'un cotxe

Exercici 261. De les variables següents, quines són discretes?

- Nombre de mascotes
- Talla de calçat
- Perímetre cranial
- Ingressos diaris en una fruiteria
- Quilograms de carn consumits al menjador d'un col·legi durant una

setmana

Exercici 262. Indica el tipus de variable estadística que estudiem i digues, en cada cas, quina és la població i la mostra

- | | |
|--|---|
| a. El programa favorit dels membres de la teva família | torrent |
| b. La talla del calçat de les alumnes d'ESO | f. El sexe dels habitants d'un poble |
| c. La temperatura mitjana diària de Binissalem | g. Els diners setmanals gastats pels teus amics |
| d. L'edat dels habitants d'un país | h. Els efectes d'un nou medicament en l'ésser humà |
| e. El tamany mitjà de les pedres d'un | i. El color dels cabells dels teus companys de classe |

Exercici 263. Determina si les variables estadístiques següents són qualitatives o quantitatives:

- | | |
|-----------------------------|--|
| a. Any de naixement | h. Nombre de vegades que ha viatjat amb avió una persona |
| b. Color dels cabells | i. Longitud del dit polsa |
| c. Professió d'una persona | j. Hores que dorm una persona |
| d. Perímetre del tòrax | k. Hora a la que es desperta una persona |
| e. Estat civil | |
| f. Marca del cotxe preferit | |
| g. Estatura | |

4.2.3 Recompte de dades

TAULA DE FREQUÈNCIES

Una vegada feta una enquesta hem de *recomptar* les dades, sobretot si el nombre de dades és molt gran. És a dir, anotem el valor i el nombre de vegades que apareix. Això permet d'un cop d'ull treure conclusions sobre les dades. Per exemple, tot d'una podem veure quina és la dada que més es repeteix.

Aquesta taula es diu *taula de freqüències absolutes* (o *taula de valors*). Per a elaborar aquesta taula hem de tenir en compte si la variable estadística que estudiem és discreta o contínua

CAS DISCRET

Exemple 3. Feim una enquesta a 25 persones sobre el *nombre de llibres llegits* en el darrer any. Obtenim les dades següents (taula 2):

1 3 4 2 2 3 2 2 1 3
3 3 1 1 2 4 4 2 3 3
2 3 3 4 4

Taula 2 Nombre de llibres llegits

Després de recomptar les dades, obtenim la taula següent (taula 3).

Nombre de llibres	Recompte
1	4
2	7
3	9
4	5
	25

Taula 3 Taula de freqüències

Això és la *taula de freqüències absolutes*, o simplement *taula de freqüències*.

La *grandària de la mostra*, que es simbolitza amb una N , és de 25. Coincideix amb la suma del recompte de les dades.

El recompte dels valors es diu *freqüència absoluta* de la variable i es simbolitza amb f_A , o simplement f .

Podem ampliar aquesta taula, trobant altres columnes:

- Freqüències relatives: és igual a la freqüència absoluta dividit pel total d'objectes. Es simbolitza amb f_R .

$$f_R = f_A/N$$

- Percentatge d'aparició: és igual a la freqüència relativa entre el total de dades per 100.

$$\% = f_R \cdot 100$$

- Freqüències absolutes acumulades, F_A , igual a la suma de les freqüències absolutes fins a un valor donat.

Si aplicam això a les nostres dades de llibres, llavors obtenim la taula següent (taula 4):

Nombre de llibres	f_A	f_R	%	F_A
1	4	$4/25 = 0,16$	16%	4
2	7	$7/25 = 0,28$	28%	$4 + 7 = 11$
3	9	$9/25 = 0,36$	36%	$4 + 7 + 9 = 20$
4	5	$5/25 = 0,20$	20%	$4 + 7 + 9 + 5 = 24$
	24	1,00	100 %	

Taula 4 Taula de freqüències *expandida*

CAS DISCRET AMB *moltes* DADES

Suposem ara que tenim una variable estadística discreta però amb una gamma de valors molt gran, és a dir, en principi amb un elevat nombre de valors diferents. Per exemple, si feim una enquesta on es demana l'edat, aleshores podem tractar aquesta variable estadística com a discreta (els enquestats respondran que tenen, per exemple, 39 anys, però no 39,5).

El nombre de valors possibles de l'edat és molt gran: va de 0 (recent nats) fins a una fita superior hipotètica de 130 anys — El rècord d'edat verificat és de Misao Okawa, de 116 anys. Per tant, si féssim una taula de freqüències, podríem tenir fins a 130 valors diferents. Això fa les dades immaneables. Per aquest motiu s'agrupen les dades en intervals.

En aquest exemple, podríem agrupar les dades en intervals d'amplitud 10, representant les dècades (vegeu “Nombre d'intervals”).

D'aquesta manera, obtenim 13 intervals: $[0, 10)$, $[10, 20)$, $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100)$, $[100, 110)$, $[110, 120)$, $[120, 130)$. En cada interval, el parèntesi significa que no prenem l'extrem i el claudàtor significa que l'extrem està inclòs. Així l'interval $[40, 50)$ representa a totes les persones de 40 anys fins a 50, incloses les de 40 anys però excloses les de 50.

D'aquesta manera, tendrem una taula de freqüències, com la següent (taula 5), que en comptes de valors tindrà intervals:

Edat	Recompte
[0, 10)	4.859
[10, 20)	4.391
[20, 30)	5.337
[30, 40)	7.750
[40, 50)	7.517
[50, 60)	6.079
[60, 70)	4.771
[70, 80)	3.440
[80, 90)	2.160
[90, 100)	379
[100, 110)	12
[110, 120)	0
[120, 130]	0
	46.695

Taula 5 Taula de freqüències (les dades són una extrapolació a partir de les dades de l'INE de l'any 2013)

Noteu que el darrer interval inclou 130 perquè hem de poder prendre el màxim teòric a qualque interval.

A partir d'aquí, el càlcul de la freqüència absoluta acumulada i la freqüència relativa es realitza de la mateixa manera que en el cas anterior de la variable discreta amb poques dades (taula 6).

Edat	f_A	f_R	Percentatge	F_A
[0, 10)	4.859	0,1040582503	10,41	4.859
[10, 20)	4.391	0,094035764	9,40	9.250
[20, 30)	5.337	0,1142948924	11,43	14.587
[30, 40)	7.750	0,1659706607	16,60	22.337
[40, 50)	7.517	0,1609808331	16,10	29.854
[50, 60)	6.079	0,1301852447	13,02	35.933
[60, 70)	4.771	0,1021736803	10,22	40.704
[70, 80)	3.440	0,0736695578	7,37	44.144
[80, 90)	2.160	0,0462576293	4,63	46.304
[90, 100)	379	0,0081165007	0,81	46.683
[100, 110)	12	0,0002569868	0,03	46.695
[110, 120)	0	0	0	46.695
[120, 130]	0	0	0	46.695
	46.695	1	100	46.695

Taula 6 Taula de freqüències ampliada

NOMBRE D'INTERVALS

El nombre d'interval·ls que es considera adequat per prendre es determina per l'anomenada *regla de Sturges*: si k representa el nombre d'interval·ls a prendre i N és el nombre de dades, aleshores $k = 1 + \log_2 N = 1 + \log N / \log 2 \simeq 1 + 3,322 \log N$.

En el cas anterior, tendríem que el nombre d'interval·ls a prendre seria $k = 1 + 3,322 \log 46.695 \simeq 16,51$. Per tant, hauríem de prendre 17 interval·ls amb una amplitud de $130/17 \simeq 7,64$. Adaptant això a nombres enters, agafaríem 18 interval·ls d'amplitud 8.

Aquesta regla és elàstica i s'adapta depenent del cas. Té la desavantatge que conforme creix la mostra, creix el nombre d'interval·ls, encara que ni la variable estadística ni la població no hagin canviat.

CAS CONTINU

En el cas continu s'actua de la mateixa manera que en el cas anterior, agrupant les dades per interval·ls.

Exemple 4. Suposem que l'altura d'un grup de 30 persones és el següent (taula 7):

1,60 1,55 1,53 1,80 1,75 1,65 1,74 1,83 1,70 1,56
 1,66 2,01 1,67 1,68 1,86 1,78 1,87 1,65 1,55 1,59
 1,68 1,75 1,63 1,82 1,65 1,85 1,77 1,88 1,74 1,58

Taula 7 Altura de 30 persones

L'altura és una variable estadística contínua. Si volem agrupar aquestes dades per tal de fer un recompte, haurem d'agrupar-les per intervals. Agruparem les dades en 6 intervals. Si la diferència entre el valor més gran i el valor més petit és igual a $2,01 - 1,53 = 0,48$, això vol dir que cada interval tendrà amplitud $0,48/6 = 0,08$. Per tant, la taula de freqüències absolutes serà:

Altura	Recompte
[1,53; 1,61)	7
[1,61; 1,69)	8
[1,69; 1,77)	5
[1,77; 1,85)	5
[1,85; 1,93)	4
[1,93; 2,01]	1
	30

Taula 8 Taula de freqüències

De la mateixa manera que en el cas anterior, calcularíem les freqüències relatives, les freqüències absolutes acumulades i el tant per cent:

Altura	f_A	f_R	%	F_A
[1,53; 1,61)	7	0,2333	23,33	7
[1,61; 1,69)	8	0,2666	26,66	15
[1,69; 1,77)	5	0,1666	16,66	20
[1,77; 1,85)	5	0,1666	16,66	25
[1,85; 1,93)	4	0,1333	13,33	29
[1,93; 2,01]	1	0,0333	3,33	30
	30	0,9997	99,97	30

Taula 9 Taula de freqüències ampliada

Exercici 264. Demanem a 20 persones sobre el nombre de vegades que havien viatjat a l'estranger i el resultat ha estat aquest (figura 10):

3 5 4 4 2 3 3 3 5 2
6 1 2 3 3 6 5 4 4 3

Taula 10 Viatges a l'estranger

- De quin tipus de variable es tracte?
- Quin és el tamany de la població? I de la mostra?
- Organitza les dades. Fes-ne un recompte

Exercici 265. Completeu la taula estadística següent, on f , F i f_r representen, respectivament, la freqüència absoluta, la freqüència absoluta acumulada i la freqüència relativa.

x	10	11	12	13	14
f	3	3	5		
F				18	
f_r	0,12				

Exercici 266. Completeu la taula estadística següent, on x , f , F i f_r representen, respectivament, la variable estadística, la freqüència absoluta, la freqüència absoluta acumulada i la freqüència relativa.

x	2	4	10	14	16
f	9	9	5		
F				29	
f_r	0,15				

Exercici 267. Les dades següents corresponent al nombre de sabates usades per 20 individus:

39, 40, 41, 42, 39, 39, 40, 41, 40, 42,
40, 41, 40, 39, 40, 39, 39, 39, 40, 41

- Digueu quin tipus de variable és: discreta o contínua
- Construiu la taula de freqüències absolutes

Exercici 268. El nombre de fills de cinquanta famílies d'un poble de Mallorca són:

2, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 0,
 0, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 5, 1, 4, 0, 0, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1,
 1, 2, 2, 2, 1, 3, 6, 0, 0, 0.

(a.) Trobeu la taula de freqüències. (b.) Quin tant per cent representa cada valor?

Exercici 269. El nombre de gols marcats per un jugador de futbol per partit són:

2, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 4, 0, 1

Trobeu i, si és possible, interpreteu:

- La taula de freqüències
- Les freqüències relatives, els percentatges d'aparició i la freqüència absoluta

Exercici 270. Trobeu el percentatge d'aparició del nombre de viatges que varen fer un nombre de persones en el darrer any:

10, 20, 15, 17, 8, 7, 10, 15, 0, 5, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 5,
 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 6, 4, 8, 2, 3, 3, 7, 8,
 9, 7, 5, 6, 6, 5, 9, 3, 3, 4.

Exercici 271. Si tirem un dau 5000 vegades, el nombre de vegades que surt cada nombre segueix la següent taula:

Valor	Freqüència absoluta
1	0
2	500
3	250
4	800
5	200
6	3250

Trobeu les freqüències acumulades, les freqüències relatives i el tant per cent d'aparició de cada valor.

Exercici 272. Volem estudiar el nombre d'hores que dormen per dia (de 0 a 12) els membres d'una família. Per això feim l'estadística durant un mes:

6, 7, 8, 8, 5, 6, 6, 8, 9, 11,
10, 5, 7, 8, 4, 6, 8, 7, 9, 10,
5, 8, 8, 8, 4, 7, 6, 7, 8, 8.

Taula 11 Pare

8, 8, 7, 8, 9, 8, 7, 8, 9, 8,
8, 9, 10, 8, 9, 9, 8, 8, 7, 8,
8, 8, 7, 9, 9, 8, 8, 11, 8, 6.

Taula 12 Mare

9, 10, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 10, 11,
9, 9, 8, 8, 8, 10, 10, 8, 8, 8,
8, 4, 12, 10, 8, 8, 9, 8, 7, 9.

Taula 13 Fill

Responen:

- Qui dorm més cada dia?
- Calculeu el tant per cent que representa dormir 8 hores a cadascun dels familiars

Exercici 273. Trobeu la taula de freqüències de les dades següents:

10, 6, 4, 5, 2, 3, 9, 1, 10, 2,
7, 8, 5, 3, 2, 7, 4, 7, 8, 8,
3, 5, 7, 9, 1, 2, 7, 5, 9, 10.

Exercici 274. Feis la taula de freqüències de:

1, 2, 2, 1, 5 1, 2, 1, 1, 2
2, 2, 3, 3, 2 3, 2, 1, 2, 3
3, 5, 2, 5, 3 1, 2, 3, 5, 5

Exercici 275. El nombre de cotxes que tenen 25 famílies a Balears és:

0, 0, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 0, 4,
 0, 1, 2, 0, 3, 0, 1, 0, 4, 0.
 0, 3, 1, 0, 3.

Feis la seva taula de freqüències.

Exercici 276. Feis la taula de freqüències de:

1, 2, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 1, 2
 2, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3
 3, 5, 2, 5, 3, 1, 2, 3, 5, 5

Si x representa la variable estadística recopilada, a què és igual x_3 ?, I f_4 ? i f_{r_5} ?

4.3 Paràmetres estadístics

TIPUS DE PARÀMETRES ESTADÍSTICS

Els paràmetres estadístics són nombres que ens informen sobre una propietat de les dades que estudiem. Es classifiquen en dos tipus:

- Paràmetres de centralització
 Ens informen de com seria una *dada tipus*, de com és el *perfil* de les dades. En altres paraules, ens proporcionen un resum de les dades. Són valors que representen, de qualque manera, les dades.
- Paràmetres de dispersió
 Ens diuen com de disperses estan les dades, és a dir, si els valors són molt homogenis o per contra són heterogenis.

Els paràmetres més habituals són aquests:

Tipus	Paràmetre i símbol	Càlcul i significat
Centralització	Mitjana aritmètica (\bar{x})	Es calcula sumant tots els valors i dividint pel nombre total de dades Si totes les dades fossin iguals, aquest seria el valor que tendrien

Tipus	Paràmetre i símbol	Càlcul i significat
Centralització	Moda (M_o)	<p>És el valor de les dades que més apareix. Hi poden haver dos o més valors que tenen la mateixa freqüència absoluta</p> <p>És el valor que més apareix. La major part de les dades tenen aquest valor</p>
Centralització	Mediana (M_e)	<p>Una vegada s'ordenen les dades de menor a major, és el nombre x que deixa el 50% de les dades a la seva esquerra.</p> <p>Per una variable estadística discreta, és el valor central de les dades. Si el nombre de dades és parell, es pren la mitjana aritmètica dels dos valors centrals.</p> <p>Es pot interpretar com que el 50% de les dades són menors o iguals que aquest valor.</p>

Tipus	Paràmetre i símbol	Càlcul i significat
Centralització	Quartils (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)	<p>Una vegada ordenades les dades de menor a major:</p> <ul style="list-style-type: none"> • el quartil Q_1 és el nombre que deixa a l'esquerra un quart de les dades • el quartil Q_2 és el nombre que deixa a l'esquerra dos quarts de les dades • i el quartil Q_3 és el nombre que deixa a l'esquerra tres quarts de les dades <p>Q_2 coincideix amb la Mediana. Cap percentil té perquè ser part de les dades.</p> <p>Permeten afitar les dades. Per exemple, sabem que un quart de les dades tendrà un valor entre Q_2 i Q_3.</p>
Centralització	Percentils (p_x)	<p>El percentil p_x és el nombre tal que, una vegada ordenades les dades, deixa a la seva esquerra l'$x\%$ de les dades.</p> <p>Tenim que $p_{50} = Me$, $p_{25} = Q_1$ i $p_{75} = Q_3$.</p>
Dispersió	Rang (R)	<p>És la diferència entre la dada major i la dada menor</p> <p>Dóna una idea de com de juntes estan les dades, és a dir, de la seva homogeneïtat.</p>

Tipus	Paràmetre i símbol	Càlcul i significat
Dispersió	Desviació mitjana (DM)	<p>També s'anomena variació mitjana.</p> <p>Consisteix en el promig de les diferències, en valor absolut, entre la mitjana aritmètica i els valors de les dades. És a dir, per a calcular-la hem de restar cada valor menys la mitjana aritmètica, sempre amb signe positiu. I després fer la mitjana de totes aquestes restes.</p> <p>Es pot interpretar com quant ens desviem de la mitjana aritmètica en promig. L'interval $(\bar{x} - DM, \bar{x} + DM)$ dóna una idea del comportament típic de les dades: en promig les dades estan en aquest interval.</p>
Dispersió	Variància (Var)	<p>S'obté fent el promig dels quadrats de la diferència entre cada valor i la mitjana aritmètica. És a dir, per a calcular-la restem cada valor menys la mitjana aritmètica i el resultat l'elevem al quadrat. Després feim la mitjana aritmètica d'aquests valors.</p>
Dispersió	Desviació típica (σ)	<p>És l'arrel quadrada positiva de la variància.</p> <p>El resultat més interessant per a la desviació típica es coneix com a <i>Desigualtat de Txebixev</i>: si k és un nombre real, aleshores dins l'interval $(\bar{x} - k \cdot \sigma, \bar{x} + k \cdot \sigma)$ hi ha, com a mínim, el $100 \cdot (1 - \frac{1}{k^2})$ percent de les dades. Aquesta desigualtat només és útil quan $k > 1$.</p>

Tipus	Paràmetre i símbol	Càlcul i significat
Dispersió	Coefficient de variació (C)	Està donat per $C = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$ Dóna una idea del tant per cent de variació respecte de la mitjana que hi ha a les dades. Si el coeficient és gran, vol dir que les dades són molt heterogènies. Si el coeficient és petit, aleshores les dades són homogènies. Els casos extrems són: $C = 0$ que vol dir que les dades són iguals i $C = 100$ que vol dir que no hi ha cap dada igual.

Exemple 5. Trobem tots els paràmetres en el cas de l'exemple anterior dels dies llegits (exemple 3):

a. Mitjana aritmètica:

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 4 + 2 + \dots + 4}{25} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 5}{25} = 65/25 = 2,6.$$

Això vol dir que si tothom llegís el mateix, cada persona llegiria 2,6 llibres per any.

b. Moda: el valor que més es repeteix és el 3. Per tant, $Mo = 3$, és a dir, el més freqüent és que es llegeixin tres llibres per any

c. Mediana: ordenem les dades inicials:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4

i prenem el valor d'enmig. Com que tenim un nombre senar de dades, vint-i-cinc, resulta que el valor central és el valor que ocupa la posició 13a. Per tant, $Me = 3$.

d. Quartils: hi ha 25 dades. Un quart de les dades són $25/4 = 6,25$, és a dir, 6 dades. Per tant, el nombre que deixa a l'esquerra un quart de les dades (6 dades), una vegada s'han ordenat, és el 2. Per tant, $Q_1 = 2$. De la mateixa manera, $Q_2 = 3$ deixa dos quart de les dades (12 valors) a l'esquerra, i $Q_3 = 3$ deixa tres quarts de les dades (18 valors) a l'esquerra.

e. Percentil. Per exemple, si volem trobar el percentil p_{20} hem de trobar el valor que deixa a l'esquerra el 20% de les dades, és a dir, $20 \cdot 25/100 = 5$ dades. El 2 és la dada que ocupa el lloc 6è. Per tant, $p_{20} = 2$.

- f. El rang R és igual a la diferència entre el valor màxim i el valor mínim. En el nostre cas, $R = 4 - 1 = 3$. Noteu que hi ha $R + 1 = 4$ valors diferents en la nostra enquesta sobre el nombre de llibres llegits (de 1 a 4 hi ha 4 valors diferents). $R + 1$ dóna la gamma de valors, és a dir, la resposta a la nostra enquesta pot tenir quatre valors.
- g. Desviació mitjana: en primer lloc, calculem la diferència entre els valors i la mitjana aritmètica:
- $|1 - 2,6| = 1,6$
 - $|2 - 2,6| = 0,6$
 - $|3 - 2,6| = 0,4$
 - $|4 - 2,6| = 1,4$

Per tant,

$$DM = \frac{1,6 \cdot 4 + 0,6 \cdot 7 + 0,4 \cdot 9 + 1,4 \cdot 5}{25} = 0,848$$

Això vol dir que, en promig, hi ha una variació de 0,848 entre la mitjana i les dades. Per tant, el més probable és trobar les dades entre 1,752 i 3,448.

- h. Variància: calculem el quadrat de la diferència entre la mitjana i els valors de l'enquesta:
- $(1 - 2,6)^2 = 1,6^2 = 2,56$
 - $(2 - 2,6)^2 = 0,6^2 = 0,36$
 - $(3 - 2,6)^2 = 0,4^2 = 0,16$
 - $(4 - 2,6)^2 = 1,4^2 = 1,96$

Per tant,

$$Var = \frac{2,56 \cdot 4 + 0,36 \cdot 7 + 0,16 \cdot 9 + 1,96 \cdot 5}{25} = 0,96$$

- i. La desviació típica és $\sigma = \sqrt{Var} = \sqrt{0,96} \simeq 0,979$. Prenent $k = 2$, la desigualtat de Txebixev ens diu que hi ha, com a mínim, un 75% de les dades entre 0,642 i 4,558. Cosa que efectivament passa, ja que les nostres dades estan entre 1 i 4. Per tant, realment hi tenim un 100% de dades en aquest interval.

Si les dades estan molt disperses, la desigualtat de Txebixev no és molt útil, el contrari de si les dades estan molt concentrades.

En el cas de variables contínues o bé variables concretes amb moltes dades, s'utilitza la *marca de classe* per a calcular aquests paràmetres. La marca de classe no és res més que l'element central de l'interval. De qualche manera aquest element *representa* l'interval.

Exemple 6. Trobem els paràmetres estadístics pel cas continu. Farem servir les dades de l'exemple 4, on tenim les altures d'un grup de 30 individus:

- a. Marca de classe: és el valor central de cada interval:

Altura	Marca de classe	f_A
[1, 53; 1, 61)	1,57	7
[1, 61; 1, 69)	1,65	8
[1, 69; 1, 77)	1,73	5
[1, 77; 1, 85)	1,81	5
[1, 85; 1, 93)	1,89	4
[1, 93; 2, 01]	1,97	1
		30

Taula 14 Taula de freqüències absolutes i marca de classe

Per al càlcul del valor mitjà entre dos donats, sumem els valors i dividim entre dos. D'aquesta manera, $(1, 53 + 1, 61)/2 = 1, 57$.

A partir d'aquí tots els càlculs es fan amb la marca de classe, com si tenguéssim una variable discreta.

- b. Mitjana aritmètica:

$$\bar{x} = \frac{1, 57 \cdot 7 + 1, 65 \cdot 8 + 1, 73 \cdot 5 + 1, 81 \cdot 5 + 1, 89 \cdot 4 + 1, 97 \cdot 1}{30} = 1, 714$$

- c. Moda: el valor que més es repeteix és 1,65. Per tant, $Mo = 1, 65$.
- d. Mediana: tenim 30 dades. Per tant, el valor que deixa 15 dades a l'esquerra és 1,73. Per tant, $Me = 1, 73$.
- e. Quartils: tenim 30 dades. Per tant, un quart de les dades són 7,5, la meitat són 15 dades i tres quarts són 22,5. Això vol dir que $Q_1 = 1, 65$, $Q_2 = Me = 1, 73$ i $Q_3 = 1, 81$.
- f. Percentil: per exemple trobem el percentil p_{20} , és a dir, el valor que deixa a l'esquerra el 20% de les dades. El 20% de 30 dades són 6. Per tant, p_{20} és la dada que ocupa la setena posició, és a dir, $p_{20} = 1, 57$.

g. El rang: $R = 2,01 - 1,53 = 0,48$. Per a calcular el rang no fem la marca de classe, perquè la seva definició és la diferència entre els valors màxim i mínim.

h. Desviació mitjana: tenim que

$$\begin{aligned} DM &= \frac{|1,57 - 1,714| \cdot 7 + |1,65 - 1,714| \cdot 8 + \dots + |1,97 - 1,714| \cdot 1}{30} \\ &= \frac{0,144 \cdot 7 + 0,064 \cdot 8 + 0,016 \cdot 5 + 0,096 \cdot 5 + 0,176 \cdot 4 + 0,256 \cdot 1}{30} \\ &= 0,101333333333 \end{aligned}$$

De la mateixa manera, calcularíem la variància i la desviació típica.

4.3.2 Paràmetres de centralització

Exercici 277. Trobeu la mitjana, la mediana i la moda de les notes de Llengua Catalana d'una classe de tercer d'ESPA:

1, 5, 6, 7, 6, 9, 8, 9, 8, 4, 3, 7, 8, 5, 6, 7, 8, 5, 6, 8

Interpreteu-les.

Exercici 278. Calculeu la mediana i la moda de les següents dades:

1, 2, 4, 2, 1, 5, 6, 1, 5, 6

Exercici 279. Hem analitzat un text, cercant línia per línia els errors ortogràfics que apareixen. Després d'analitzar 45 línies, aquests han estat els resultats:

0, 1, 2, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2,
4, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 5, 0, 3, 2, 1, 0,
0, 2, 0, 1, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 3, 0, 1, 0, 0

Amb aquestes dades:

- Feis la taula de freqüències
- Calculeu la moda
- Calculeu la mitjana aritmètica

Exercici 280. Aquestes són la mida de 50 pedres del torrent de sa Riera (en cm), separats per punt i comes:

2; 2,3; 4; 2,1; 1,2; 5; 2,1; 3; 2,4; 2,2;
 1,9; 1,95; 2,01; 2,51; 2,67; 2,6; 2,7; 2,8; 2,55; 2,56;
 8; 2,3; 2,02; 1,99; 1,89; 3,4; 2,1; 2,02; 2,78; 2,09;
 1,22; 2,03; 2,4; 3,1; 2,22; 3,1; 3,1; 2,3; 2,3; 2,03;
 2,4; 3,2; 5; 2,5; 1,3; 1; 4,1; 3,3; 2,7; 2,92

- Agrupeu les dades en intervals en quatre intervals
- Trobeu la marca de classe de cada interval
- Amb les marques de classe, trobeu la mitjana aritmètica, la moda i la mediana
- Interpreteu les dades anteriors
- Feis una gràfica que representi la marca de classe i la seva freqüència absoluta

Exercici 281. El color de les camisetes de 20 al·lots i al·lotes d'un institut és:

VERMELL, VERD, BLAU, VERD, GROC,
 VERMELL, BLAU, BLAU, GROC, BLAU,
 VERD, BLAU, MARRÓ, NEGRE, VERMELL,
 VERMELL, BLAU, BLAU, GROC, BLAU

- Quina és la moda? Quina freqüència té?
- Si en l'institut hi ha 300 alumnes (entre al·lots i al·lotes) en total, quantes persones duran una camiseta de color vermell si extrapolam les dades?
- Podem calcular la mitjana aritmètica? I la mediana? Per què?

Exercici 282. Calculeu la mitjana, la moda i la mediana d'aquesta sèrie de dades:

3, 2, 4, 9, 8, 1, 0, 2, 4, 1, 8, 6, 3, 4, 0, 7, 3, 2, 4, 5, 2, 5,
 6, 5, 4, 9, 2, 5, 7, 4, 1, 8, 6, 1, 5, 7, 1, 3, 0, 5, 0, 2, 1, 5, 5

Si aquestes dades corresponguessin al nombre de llibres per mes que han llegit els espanyols l'any 2010, què signifiquen els paràmetres anteriors?

Exercici 283. Hem recopilat una sèrie de dades en una taula de freqüències:

Valor	26	28	30	32
Freqüència	6	7	4	4

- Calculeu la mitjana aritmètica
- Calculeu la moda
- Si ordenéssim totes les dades de menor a major, quin seria el valor que ocuparia just la posició central? Com s'anomena aquest valor?

Exercici 284. El nombre d'aparells d'aire condicionat venuts per vuit dependents durant el mes de març va ser:

8, 11, 5, 14, 8, 11, 16, 11

Trobeu:

- la mitjana aritmètica
- la moda
- el tant per cent que representa cada valor
- Què volen dir aquestes dades?

Exercici 285. Calculeu la moda, la mediana, el quartil Q_3 i els percentils p_{45} i p_{90} d'aquestes dades:

10, 1, 2, 5, 9, 4, 6, 7, 3, 2, 1, 5, 8, 4, 6,
 3, 8, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 4, 4, 4, 5, 2, 2, 3,
 6, 7, 8, 2, 4, 1, 2, 5, 2, 6.

Exercici 286. Calculeu a si sabem que la mitjana de les dades següents és igual a 21,25. Les dades són:

Valors	10	15	20	25	50
Freqüència absoluta	3	4	2	a	2

Exercici 287. Les dades següents:

23, 17, 19, x , 16, y

tenen com a mitjana 20 i com a moda 23. Quant valen x i y ?

Exercici 288. Donats quatre nombres, a , b , c i d , si diem $\bar{x}_{a,b}$ a la mitjana de a i b , $\bar{x}_{c,d}$ a la mitjana de c i d i \bar{x} a la mitjana de a , b , c i d , digueu com podem obtenir \bar{x} en funció de $\bar{x}_{a,b}$ i $\bar{x}_{c,d}$, o sigui, com podem obtenir la mitjana de quatre nombres coneixent les mitjanes dels nombres collits de dos en dos.

Exercici 289. El nombre de germans que tenen diversos habitants d'un poble són:

Germans	0	1	2	3
Freqüència absoluta	60	100	150	90

Calculeu:

- La mitjana aritmètica del nombre de germans per persona
- El tant per cent que suposa cada ocurrència del nombre de germans.
- La seva mediana
- Interpreteu aquestes dades.

Exercici 290. Quin és el rang d'aquestes dades?

2, 1, 1, 0, 2, 2, 1, 1, 1, 5,
2, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 1.

- Què vol dir el resultat d'aquesta variable estadística si les dades corresponen al nombre de televisors que tenen 20 famílies de Mallorca?
- Calculeu la moda i la mitjana aritmètica? Què volen dir aquests resultats?

Exercici 291. En la primera avaluació, dels 30 alumnes d'una classe, el 10% ho va aprovar tot, el 20% va suspendre una assignatura, el 50% va suspendre dues assignatures i la resta va suspendre més de dues assignatures.

- A partir d'aquestes dades, feis la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana aritmètica del nombre d'assignatures suspeses

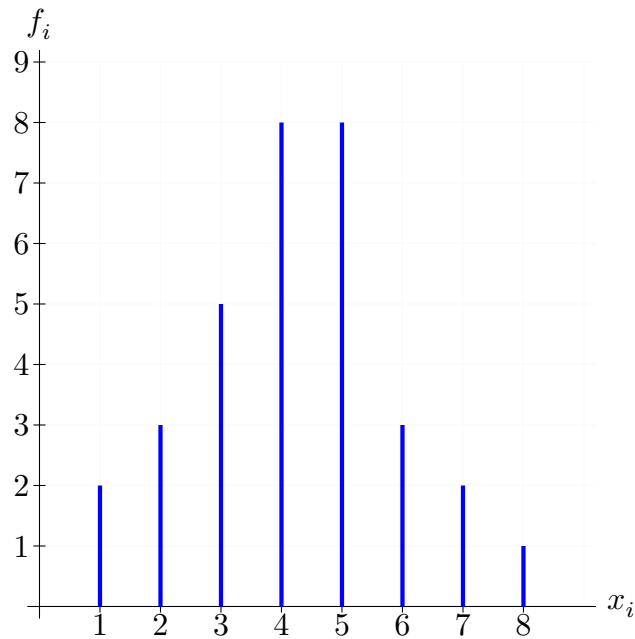
Exercici 292. El color dels cabells de 30 persones és:

M, R, P, M, M, M, M, P, R, R, M, M, R, R, R,
R, P, M, M, M, P, M, M, M, M, M, R, M, M, M

on M = moreno, R = ros i P = pèl-roig.

- Construïu la taula de freqüències
- Calculeu la moda
- Es pot calcular la mitjana? Per què?

Exercici 293. A partir del diagrama següent:



- Trobeu la moda
- Trobeu la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana

Si el diagrama fos sobre el nombre de mòbils que han tengut 32 persones, què significarien les dades que heu calculat?

Exercici 294. El nombre de cotxes que tenen 8 famílies escollides a l'atzar és:

$$2, 0, 2, 3, 1, 2, 2, 1$$

Feis la taula de freqüències expandida i la mitjana aritmètica.

Exercici 295. El nombre de missatges de SMS que varen enviar per Nadal una família de 10 membres varen ser:

$$10, 2, 3, 8, 1, 0, 7, 8, 7, 4$$

Feu la taula de freqüències i trobeu la mitjana de SMS per familiar i la moda

Exercici 296. Deprés de llançar un dau 40 cops obtenim els següents resultats:

2, 6, 1, 6, 2, 6, 1, 6, 2, 6,
4, 5, 6, 0, 4, 5, 2, 3, 5, 3,
6, 1, 2, 6, 6, 4, 6, 1, 3, 5,
2, 6, 6, 2, 4, 6, 6, 6, 5, 6.

Recompteu les dades amb la taula de freqüències i trobeu la mitjana

Exercici 297. El nombre de nets que tenen 30 persones escollides a l'atzar són:

2, 4, 11, 6, 9, 6, 4, 3, 2, 1, 0, 2, 3, 0, 4,
5, 6, 7, 6, 8, 7, 0, 2, 3, 4, 4, 6, 5, 6, 6.

Feis la taula de freqüències i calculeu la moda

Exercici 298. El nombre de dies de pluja per setmana a la ciutat de Londres durant 54 setmanes (un any) són:

0, 3, 4, 7, 4, 6, 5, 0, 1, 4, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 1, 7, 0, 7,
1, 7, 4, 2, 5, 7, 6, 3, 3, 8, 2, 2, 2, 2, 5, 4, 2, 1, 0, 1,
6, 2, 1, 5, 3, 0, 6, 5, 2, 2, 0, 0, 0, 5.

Feis la taula de freqüències i trobeu la mitjana i la moda

Exercici 299. A una classe de 4t d'ESPA, les notes de Matemàtiques de cada alumne són:

4, 5, 6, 1, 2, 6, 7, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 4, 6, 4, 9,
5, 3, 4, 1, 6, 6, 6, 5, 4, 0, 6, 6, 5, 4, 0, 5, 3, 4, 1, 6.

- Feis la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana, la moda

Exercici 300. De les sis assignatures que es poden aprovar en un curs d'ESPA, els alumnes de 4t han aprovat les següents assignatures el primer quadrimestre:

5, 6, 4, 6, 3, 6, 4, 3, 4, 6,
5, 0, 5, 1, 6, 2, 6, 3, 6, 5,
5, 6, 1, 6, 6, 1, 0.

- Feis la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana
- Trobeu la moda

Exercici 301. El nombre gols per partit de dos equips de futbol són:

- Equip *A*

2, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 0 2, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 2, 3
 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 0 3, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 0, 3, 2.

- Equip *B*

1, 4, 0, 1, 0, 3, 4, 2, 3, 0 2, 3, 3, 5, 1, 2, 0, 3, 0, 3
 0, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 0, 2, 4 0, 3, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 2.

- Feis la taula de freqüències de cada equip.
- Quin tant per cent té cada equip de marcar com a màxim 2 gols?
- Quin equip marca més gols per partit?

Exercici 302. Calculeu la moda, la mediana, el quartil Q_3 i els percentils p_{40} i p_{95} de les dades següents.

30, 80, 50, 60, 70, 80, 90, 10, 40, 40, 40, 50, 20, 20, 30, 100, 10, 20, 50, 90,
 40, 60, 70, 30, 20, 10, 50, 80, 40, 60, 10, 20, 50, 20, 60, 60, 70, 80, 20, 40

Exercici 303. El nombre de persones que va assistir diàriament a una classe de 4t d'ESPA va ser:

0, 8, 5, 4, 9, 9, 6, 12, 5, 11
 13, 5, 12, 7, 15, 8, 12, 9, 17, 18

- Agrupa les dades en intervals d'amplitud 5
- Calcula \bar{x} i Mo

Exercici 304. Les notes de Matemàtiques d'una classe de 4t d'ESPA són:

0, 2, 3, 1, 3, 3, 2, 1, 3, 3,
 5, 6, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 9, 10.

- Calcula la mitjana i la moda
- Troba la mediana i treu conclusions.

Exercici 305. Deprés de llançar un dau 40 cops obtenim els següents resultats:

2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 4, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 3, 5, 3,
6, 5, 2, 2, 1, 4, 1, 1, 3, 5, 2, 6, 6, 2, 4, 3, 1, 1, 5, 1

- Recompteu les dades amb la taula de freqüències
- Trobeu el rang de valors
- Trobeu la mitjana aritmètica
- Calculeu la moda
- Calculeu la mediana
- Segons aquests paràmetres podem dir si el dau està trucat o no? Raoneu la resposta

Exercici 306. El nombre d'assignatures aprovades (de 0 a 5) d'una classe de 4t d'ESPA són:

0, 1, 0, 4, 5, 4, 5, 3, 4, 2,
1, 0, 2, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1
1, 5, 2, 0, 0, 1, 2, 3, 5, 5

Feis la taula de freqüències i calculau \bar{x} , Me i Mo

Exercici 307. El nombre de persones per caixa en un supermercat és:

1, 2, 5, 4, 0, 0, 1, 2, 3, 2,
2, 2, 5, 6, 1, 2, 2, 2, 0, 10,
1, 1, 3, 5, 3, 1, 4, 3, 5, 5

- Quanta gent hi ha al supermercat fent coa?
- Quin és el nombre màxim de persones que esperen a una caixa?
- Quin és el valor més usual de persones a una coa d'una caixa?
- Quina és la mitjana?
- Trobeu p_{75}
- Interpreteu cadascun d'aquestes dades
- Amb tota aquesta informació, podríeu dir que hi ha poques o moltes persones fent coa a caixa?

4.3.3 Paràmetres de dispersió

Exercici 308. Les notes de n'Albert i na Sònia en 5 exàmens són:

Albert	4	6	6	7	5
Sònia	4,30	6,20	6,00	5,00	5,50

- Calculeu la mitjana aritmètica dels dos
- Trobeu la resta entre la mitjana aritmètica i el valor de l'examen (sempre heu de restar el major menys el menor):

Albert	4	6	6	7	5
Mitjana:					
Resta:					
Sònia	4,30	6,20	6,00	5,00	5,50
Mitjana:					
Resta:					

- Fent un cop d'ull a aquesta taula podíeu dir si algun és més regular o no?
- Què passaria si féssim la mitjana d'aquestes restes? Què significaria aquest nombre? (aquest paràmetre es diu *desviació mitjana*)

Exercici 309. Els sous mensuals de 20 empleats d'una empresa de telecomunicacions són:

1200, 1600, 1400, 1300, 1500, 1200, 1500, 1500, 1500, 1500,
1300, 1200, 1600, 2000, 1000, 1200, 1000, 1200, 1300, 1400

- Quina és la moda?
- Quina és la mitjana aritmètica?
- Troba la variació mitjana del sou. Segons el que has calculat, tothom cobra el mateix o no?

Exercici 310. Els gols d'un jugador de futbol en 20 partits són:

1, 0, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 3, 0, 0, 1, 1, 0

El president de l'equip on juga vol saber:

- Si marca prou gols per partit
- Si és prou regular

Què li respondries?

Exercici 311. Dos equips de bàsquet han obtingut els resultats següents en 10 partits:

Equip A	Equip B
72, 60, 80, 90, 62, 60, 95, 110, 85, 86	80, 90, 70, 85, 75, 80, 82, 78, 81, 79

- Calcula la mitjana
- Quin dels dos és més regular?

Exercici 312. Les notes d'un grup de 3r d'ESPA són:

6, 5, 3, 7, 5, 4, 6, 8, 2, 6, 9, 4, 5, 6, 4, 5, 6, 8, 4, 3, 0

Amb aquestes notes podem dir que el grup és més o menys homogeni o bé hi ha classes d'alumnes que tenen rendiments molt diferents?

Exercici 313. Sabem que l'empresa A té de mitjana un sou de 15000 € i una variació mitjana de 200 €.

- Creus que és alta o baixa?
- I si tengués una variació mitjana de 1000 €?
- A partir de quin nombre establiries que la variació mitjana és alta?

Exercici 314. Les notes del segon quadrimestre d'un curs de 4t d'ESPA són les següents:

4, 7, 6, 3, 8, 5, 6, 7, 6, 6, 8, 9, 3, 6, 5, 5, 8, 7, 6, 8

- Trobeu la mitjana aritmètica, la desviació mitjana i l'interval de la desviació mitjana
- Interpreteu aquestes dades
- Quines notes apareixen menys del 30

Exercici 315. Les precipitacions enregistrades a una estació metereològica durant vint dies de l'any són (en l/m^2):

0, 80, 20, 20, 82, 0, 31, 86, 83, 90,
96, 72, 55, 87, 82, 15, 99, 59, 65, 96.

- Agrupeu les dades en intervals d'amplitud 20
- Trobeu el coeficient de variació. Varia molt la pluja en aquesta zona al llarg de l'any?

Exercici 316. Per cadascun dels següents conjunts de dades:

- 4, 4, 6, 0, 9, 5, 5, 0, 5.
- 0, 1, 1, 3, 3, 0, 5, 3.
- 1, 1, 5, 9, 5, 6, 2, 8, 6, 3.

- Trobeu la mediana i la desviació mitjana dels següents conjunts de dades
- Digueu quines són les dades més disperses

Exercici 317. La taula de freqüències de del diàmetre de les pedres a un riu és la següent:

Interval	Freqüència absoluta
[0, 2)	1.200
[2, 4)	2.500
[4, 6)	2.000
[6, 8)	8.000
[8, 10)	1.000
[10, 12)	50

Trobeu la mediana, la moda, la desviació mitjana i el coeficient de variació. Interpreteu els resultats.

Exercici 318. Villarriba i Villabajo fan una estadística sobre el sou que guanyen els seus habitants:

Villarriba	Villabajo
2000, 2500, 2700, 2800, 3000	1800, 2400, 2600, 2800, 3400

- Calculeu tots els paràmetres de centralització de les dues poblacions, i compareu-les
- Calculeu els paràmetres de dispersió i compareu-los
- Quines conclusions podeu treure

Exercici 319. Dos equips de bàsquet tenen les següents estadístiques pel que fa al nombre de punts per partit:

Equip A	Equip B
75, 74, 80	100, 80, 85
62, 65, 95	92, 96, 82
100, 110, 96	96, 97, 97
120, 125, 115	83, 80, 86

- Quin equip fa més punts per partit?
- Quin són els punts més freqüents en cada equip?
- Trobeu la desviació mitjana i el coeficient de variació, i treieu conclusions sobre la constància de cada equip

Exercici 320. El nombre d'hores de feina (per setmana) que fan 30 persones d'una empresa són:

40, 50, 60, 43, 35, 30, 43, 54, 56, 46, 50, 51, 42, 44, 46,
47, 46, 48, 49, 60, 59, 57, 55, 44, 52, 48, 47, 30, 47, 70.

- Trobeu la mitjana d'hores per empleat
- Quantes hores són les que fan feina els empleats més freqüentment
- Tothom fa les mateixes hores de feina? Hi ha molta diferència entre el que fa més hores de feina i el que en fa més?

Exercici 321. L'edat en que es treuen el carnet de cotxe un grup de persones escollides a l'atzar és:

18, 19, 18, 20, 23, 18, 43, 24, 30, 18,
52, 30, 22, 21, 19, 18, 19, 20, 21, 27,
21, 48, 36, 40, 34, 21, 21, 19, 18, 18.

Calculeu: (a.) l'edat mitjana (b.) l'edat més freqüent a la que es treu el carnet de cotxe, (c.) i la variabilitat de les edats.

Exercici 322. Les despeses en euros que els clients realitzen a un comerç són:

Interval	Freqüència
[0, 10)	20
[10, 20)	30
[20, 30)	40
[30, 40)	30
[40, 50)	40
[50, 60)	30
[60, 70)	40
[70, 80)	10

Trobeu la desviació mitjana i treieu les vostres conclusions

4.3.4 Paràmetres de centralització i dispersió

Exercici 323. Calculeu (a.) la mitjana, (b.) la mediana, (c.) la moda i (d.) el rang de les dades següents :

Valor:	1	2	3	4	5
Freqüència:	5	6	1	4	3

Exercici 324. Les notes obtingudes per 40 alumnes a l'assignatura de Música han estat:

6, 4, 1, 7, 3, 5, 3, 7, 8, 4, 6, 6, 2, 5, 2, 6, 0, 5, 8, 7, 4,
9, 5, 10, 8, 6, 9, 7, 2, 5, 2, 6, 10, 5, 7, 6, 8, 7, 3, 6

Calculeu:

- la mitjana
- el rang
- quants estudiants han tret una nota inferior o igual a un 4?
- quants estudiants han tret un excel·lent? Quin tant per cent suposa?

Exercici 325. Els preus del lloguer mensual de l'habitatge es recullen en aquesta taula:

Preu (€)	240	270	300	330	360	390	420
Nombre d'habitatges	13	33	40	35	35	30	16

- Calculeu la mitjana del preu dels habitatges
- Quin és el preu més comú?
- Quin és el rang? Què significa aquest valor?

Exercici 326. El nombre d'assignatures suspeses de 15 alumnes va ser:

4, 1, 0, 4, 1, 4, 1, 2, 3, 0, 2, 4, 0, 3, 1

- Calculeu la moda, la mitjana aritmètica i el rang
- Mireu què signifiquen aquestes dades

Exercici 327. Feis la taula de freqüències expandida de les dades següents.

1, 2, 4, 2, 1, 5, 6, 1, 5, 6

Calculeu la mitjana, la moda i el rang de valors.

Exercici 328. Les notes de Naturals d'una classe són:

2, 1, 5, 5, 6 10, 8, 8, 7, 7
5, 6, 5, 5, 6 7, 3, 8, 0, 4
0, 6, 3, 3, 8 8, 5, 8, 3

Feis la taula de freqüències i trobeu la moda. Interpreteu-les.

Exercici 329. El nombre de persones per caixa en un supermercat és:

1, 2, 5, 4, 0 0, 1, 2, 3, 2
2, 2, 5, 6, 1 2, 2, 2, 0, 10
1, 1, 3, 5, 3 1, 4, 3, 5, 5

- Trobeu la taula de freqüències
- Trobeu la freqüència relativa, la freqüència absoluta acumulada i els percentatges d'aparició dels valors.

- c. Calculeu la mitjana i la moda
- d. Trobeu el rang de valors

Exercici 330. El nombre de cridades que ha fet una persona en els dies d'una setmana han estat:

3, 4, 1, 10, 4, 3, 2

- A. Trobeu:
 - a. El rang de valors
 - b. La mitjana aritmètica
 - c. La moda
 - d. La mediana
 - e. La desviació mitjana

B. Intepreteu cadascun dels paràmetres

Exercici 331. Les temperatura enregistrada a 36 estacions metereològiques el 15 d'agost a les 12:00 a Europa són:

25, 31, 32, 31.5, 42, 38.2, 28, 29.5, 31, 30.2,
 29.6, 28.7, 32.3, 34.5, 30.2, 20, 40, 23, 23.2, 22.2,
 21.5, 20.7, 27.8, 29.0, 30 38, 37, 36, 25, 29,
 31, 32.5, 31.6, 30.2, 28.5 28.5

- a. Agrupa les dades en intervals d'amplitud 5
- b. Troba la mitjana, la mediana
- c. Troba la temperatura més freqüent
- d. Calcula els percentils p_{25} , p_{90}
- e. Troba el coeficient de variació

Exercici 332. El nombre de persones que acudí a les classes de natació d'una piscina municipal fou:

38, 47, 40, 52, 46, 32, 55, 53, 48, 55
 54, 60, 59, 55, 56, 47, 43, 48, 60, 54
 50, 60, 39, 53, 48, 58, 45, 48, 43, 39

- a. Agrupeu les dades en intervals d'amplitud 10 i feis la taula de freqüències
- b. Trobeu les marques de classe

- c. Calculeu la mitjana, mediana i la moda
- d. Trobeu la desviació mitjana i el coeficient de variació mitjana

Exercici 333. A una classe de 4t d'ESPA, les notes de Matemàtiques de cada alumne són:

4, 5, 6, 1, 2, 6, 7, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 4, 6, 4, 9,
5, 3, 4, 1, 6, 6, 6, 5, 4, 0, 6, 6, 5, 4, 0, 5, 3, 4, 1, 6.

- a. Feis la taula de freqüències
- b. Calculeu la mitjana, la mediana i la moda
- c. Calculeu p_{75} i interpreteu-lo
- d. Calculeu el coeficient de variació

Exercici 334. Si tiram un dau 5.000 vegades, el nombre de vegades que surt cada nombre segueix la taula següent:

Nombre	1	2	3	4	5	6
Freqüència absoluta	0	500	250	800	200	3.250

- a. Feis el diagrama de barres
- b. Calculeu \bar{x} , Me , Mo i p_{75}
- c. Calculeu el coeficient de variació

Exercici 335. En els darrers deu sortejos de l'ONCE, el reintegrament va correspondre als següents nombres:

0, 1, 2, 1, 3, 8, 7, 4, 5, 6

- a. Trobeu la mitjana, la moda, la mediana i la desviació mitjana
- b. Intepreteu els resultats

Exercici 336. Es prova un nou medicament per pacients que sofreixen migranya i es realitza un estudi sobre 10.000 pacients per saber quants de dies per setmana tenen maldecap:

Dies de maldecap	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de pacients	5.000	2.000	1.000	500	200	200	100

- a. Trobeu la mitjana, mediana, moda i la desviació mitjana
- b. Si podeu, treis les conclusions oportunes
- c. En general podem dir que aquest medicament funciona?

Exercici 337. Es realitza una enquesta sobre el nombre de productes que compren els clients d'un supermercat. Els resultats sobre una mostra de 30 clients són:

10, 2, 6, 8, 13, 22, 33, 44, 10, 23, 43, 5, 20, 7, 5,
8, 90, 15, 21, 7, 21, 10, 20, 70, 34, 12, 11, 67, 70, 1.

Agrupeu les dades en sis intervals i trobeu:

- a. quin és la mitjana de productes que s'enduen els clients
- b. el nombre màxim i mínim de productes que s'enduen els clients
- c. la moda. Interpreteu-la
- d. la mediana
- e. la desviació mitjana. Varia molt el nombre de productes que s'enduen els clients?

Exercici 338. Les temperatures enregistrades a 36 estacions meteorològiques el 15 d'agost a les 12:00 a Europa són:

25, 31, 32, 31.5, 42, 38.2, 28, 29.5, 31, 30.2
29.6, 28.7, 32.3, 34.5, 30.2, 20, 40, 23, 23.2, 22.2
21.5, 20.7, 27.8, 29.0, 30, 38, 37, 36, 25, 29
31, 32.5, 31.6, 30.2, 28.5 28.5

- a. Agrupeu les dades en intervals
- b. Trobeu la mitjana, la mediana
- c. Trobeu la temperatura més freqüent
- d. Trobeu la desviació mitjana

Exercici 339. El nombre de telefonades que reb una persona en els dies d'una setmana han estat:

3, 4, 1, 10, 4, 3, 2

A. Trobeu:

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| a. El rang de valors | d. La mediana |
| b. La mitjana aritmètica | e. La desviació mitjana |
| c. La moda | |

B. Intepreteu cadascun dels paràmetres

4.4 Gràfics estadístics

DIAGRAMA DE BARRES

Es pot utilitzar per representar tant variables qualitatives com quantitatives que siguin discretes. El més comú es emprar-lo en el darrer cas.

Consisteix en representar al pla cartesià la relació entre el valor de la variable (que es situa a l'eix de les abscises) i el nombre de vegades que apareix cadascun dels seus valors, és a dir, la seva freqüència absoluta (que es situa a l'eix de les ordenades).

Exemple 7. El nombre d'hores diàries d'estudi de 30 alumnes és

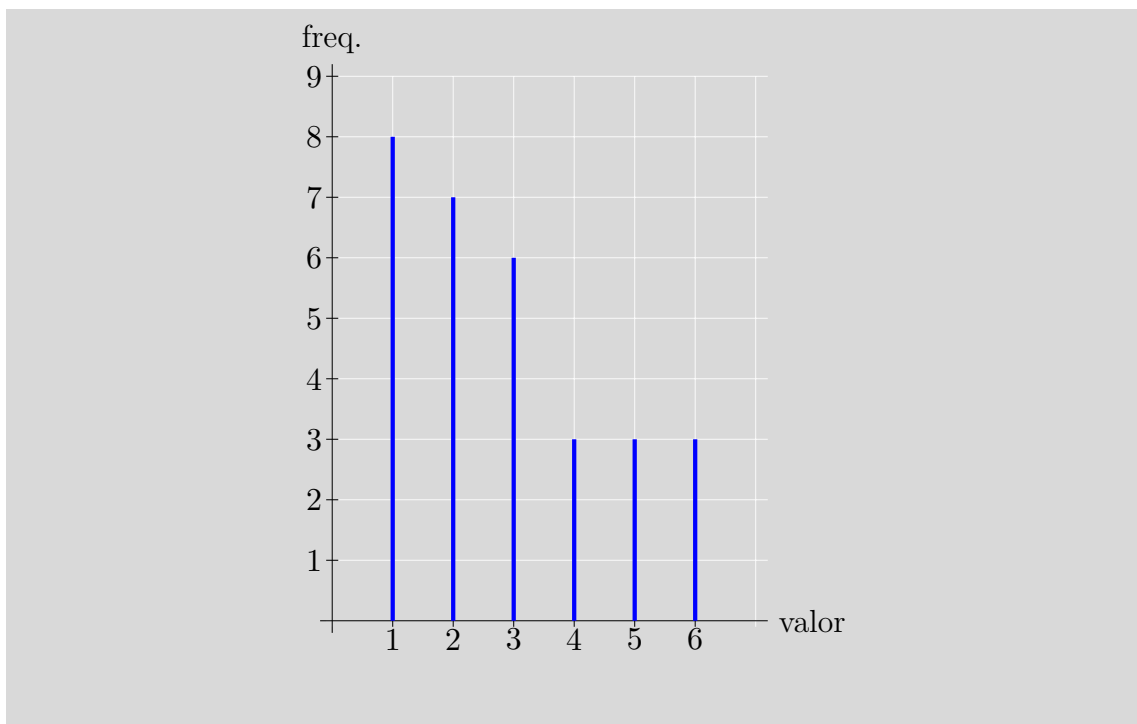
3, 4, 3, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2,
6, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 6, 1, 2, 1, 4, 3

Podem representar gràficament per fer un cop d'ull a les freqüències de cada valor?

La taula de freqüències de la variable "hores d'estudi" és:

Valor	Freqüència
1	8
2	7
3	6
4	3
5	3
6	3

El diagrama de barres es forma representant a l'eix OX el valors de la variable i a l'eix OY la seva freqüència:



Exercici 340. El nombre de mòbils que han tingut 32 persones al llarg de la seva vida ha estat:

0, 1, 3, 4, 4, 4, 6, 5, 0, 5, 3, 5, 4, 1, 4, 4, 4, 3, 2, 4, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 1, 2, 2, 2, 6, 7

- Trobeu la taula de freqüències
- Realitzeu el diagrama de barres

Exercici 341. La talla de calçat que utilitzen 20 alumnes en una classe d'Educació Física és:

37, 38, 43, 40, 40, 38, 40, 37, 39, 41, 38, 37, 37, 42, 38, 38, 38, 37, 38, 38

- Feis la taula de freqüències
- Trobeu quin tant per cent representa
- Trobeu la moda i la mitjana aritmètica
- Feis el diagrama de barres

Exercici 342. Les edats (en anys) dels 30 primers visitants del Planetari de la Fira de la Ciència 2011 han estat:

20, 7, 10, 13, 4, 7, 8, 11, 16, 14, 8, 10, 16, 18, 12,
3, 6, 9, 9, 4, 13, 5, 10, 17, 10, 18, 5, 7, 10, 20

Trobeu:

- la seva moda
- la seva mitjana
- la taula de freqüències
- feis el gràfic de barres

Exercici 343. El nombre de partits guanyats consecutivament de tennis per 30 jugadors seleccionats a l'atzar és:

4, 5, 1, 0, 4, 10, 3, 4, 6, 6 5, 1, 2, 4, 4,
7, 6, 8, 9, 6, 9, 5, 5, 4, 2 4, 4, 3, 4, 0

Trobeu la taula de freqüències expandida i feis un diagrama de barres.

Exercici 344. El nombre de pàgines web visitades diàriament per un internauta sobre un total de 12 pàgines:

4, 5, 0, 4, 12, 10, 11, 5, 6, 6 9, 5, 4, 4, 4,
5, 6, 8, 11, 9, 12, 9, 8, 9, 4 4, 3, 4, 7, 0

- Feis la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana
- Feis un diagrama de barres

Exercici 345. El nombre d'encertants per dia a la loteria a Balears és:

Nombre d'encertants	0	1	2	2	3	4	5	6
Dies	2	3	2	0	2	1	1	1

- Trobeu la mediana i p_{75}
- Feis el diagrama de barres

Exercici 346. El nombre de fills per persona d'una població de 10.000 habitants és:

Nombre de fills	Freqüència
0	2.000
1	2.000
2	500
3	250
4	230
5	20

- Trobeu la mitjana i la moda, i interpreta-les
- Feu el diagrama de barres

Exercici 347. Les notes de Ciències Naturals d'una classe són:

2, 1, 5, 5, 6, 10, 8, 8, 7, 7
5, 6, 5, 5, 6, 7, 3, 8, 0, 4
0, 6, 3, 3, 8, 8, 5, 8, 3

- Calculeu la mitjana, la mediana i la moda.
- Feis el diagrama de barres

Exercici 348. La taula de freqüències del nombre de cotxes venuts el darrer mes pels venedors de Nova York és:

Dada	0	1	2	3	4	5	6
Freqüència absoluta	500	2.000	1.900	200	100	300	1.000

Trobeu: (a.) la mitjana, la mediana i la moda, (b.) la desviació mitjana . Treieu les vostres pròpies conclusions i feis el diagrama de barres.

Exercici 349. El nombre de cotxes per persona d'una població de 5.000 habitants és:

Nombre de cotxes	Freqüència
0	2.000
1	2.000
2	500
3	250
4	230
5	20

- Trobeu la mitjana i la moda, i interpreta-les
- Feis el diagrama de barres

DIAGRAMA DE SECTORS

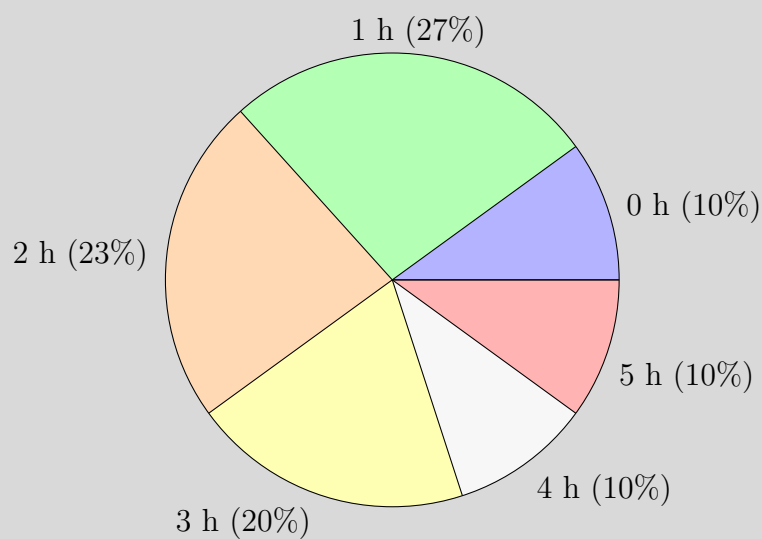
Es pot utilitzar per representar qualsevol tipus de variables.

Es sol emprar per representar resultats tancats d'enquestes, per captar visualment el tant per cent d'aparició de cada resultat.

Exemple 8. En l'exemple anterior (exemple 7), podem veure les dades com un sector. Per això, primer hem de calcular el tant per cent que representa cada valor i els graus que hem de representar (amb una regla de tres)

Valor	Freqüència	% que representa	Graus a representar
0	3	10	36
1	8	26,66	96
2	7	23,33	84
3	6	20	72
4	3	10	36
5	3	10	36
Total	30	99,99	360

I posteriorment amb un transportador d'angles i un regle, dibuixem el diagrama de sectors:



Exercici 350. Feis els diagrames de barres i el diagrama de sectors de les notes del butlletí del segon quadrimestre de 30 alumnes de 3r d'ESPA:

10, 3, 4, 5, 6, 4, 8, 9, 9, 8, 8, 4, 3, 2, 8, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 7, 8, 7, 9, 7, 8, 8, 9

Exercici 351. Realitzeu un diagrama de barres del nombres obtinguts quan es llança un dau trenta vegades:

1, 2, 1, 3, 4, 6, 6, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 6, 6,
1, 2, 3, 4, 5, 4, 2, 3, 3, 4, 6, 1, 1, 1, 6.

Podem “deduir” que el dau està trucat o no? Per quina raó?

Exercici 352. De la llista d'Eurovisió (taula 4.1), mireu quants homes i dones han participat i feu un recompte. Feu un diagrama de sectors amb aquestes dades.

Exercici 353. El color dels ulls de les persones d'un grup de 30 persones és:

VERD, MARRÓ, BLAU, MARRÓ, MARRÓ, MARRÓ,
MARRÓ, VERD, MARRÓ, BLAU, VERD, VERD,
MARRÓ, MARRÓ, BLAU, VERD, BLAU, BLAU,
BLAU, VERD, BLAU, MARRÓ, MARRÓ, MARRÓ,
MARRÓ, MARRÓ, BLAU, MARRÓ, MARRÓ, MARRÓ

Amb el transportador d'angles, feis el diagrama de sectors.

Exercici 354. Dels 30 assistents a un sopar, aquests varen ser els segons plats:

VEDELLA, PEIX, PEIX, PEIX, VEDELLA,
PEIX, XOT, PEIX, VEDELLA, PEIX,
XOT, PEIX, XOT, PEIX, VEDELLA,
PEIX, VEDELLA, PEIX, VEDELLA, XOT,
PEIX, XOT, PEIX, XOT, XOT,
XOT, XOT, XOT, XOT, XOT

Feis un gràfic de sectors amb aquestes dades

Exercici 355. Aquestes són les dades d'una enquesta sobre el nombre de ràdios a les cases espanyoles:

N. de ràdios:	0	1	2	3	4
N. de cases:	432	8.343	6.242	1.002	562

- Trobeu el tant per cent que suposen el nombre de cases amb 0 ràdios, amb 1 ràdio, etc.
- Feu un diagrama de sectors

Exercici 356. La nacionalitat de les persones que han viatjat per l'espai és la següent:

Nacionalitat	Nombre de persones	% que representa
Estats Units d'Amèrica	332	
Rússia	110	
ESA	33	
Canadà	9	
Japó	8	
La Xina	6	
Altres	21	

(La ESA inclou un conglomerat de diversos països europeus. S'inclouen d'aquesta manera perquè els països aïllats tenen molt poc pes i no apareixerien a la taula)

- Completeu la taula
- Digueu quina és la moda
- Feis el diagrama de sectors

Exercici 357. Feis el diagrama de pastís d'aquestes dades:

1, 2, 4, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 3,
3, 4, 3, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 1.

Exercici 358. La taula de freqüències absolutes del nombre de cotxes venuts el darrer mes pels venedors de Inca és:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
f_i	500	0	2.000	1.900	200	100	300

- Trobeu la mitjana, la mediana i la moda
- Calculeu la desviació mitjana i el coeficient de variació
- Treis les vostres pròpies conclusions
- Dibuixeu el diagrama de barres i el diagrama de pastís

Exercici 359. A una classe de 2n d'ESO, les notes de Català de cada alumne són:

4, 5, 6, 1, 2, 6, 7, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 4, 6, 4, 9,
5, 3, 4, 1, 6, 6, 6, 5, 4, 0, 6, 6, 5, 4, 0, 5, 3, 4, 1, 6.

- Feu la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana, la mediana i la moda
- Feu el diagrama de pastís

HISTOGRAMA

Un *histograma* (o un *histograma de freqüències*) és un diagrama per a variables estadístiques que s'agrupen en intervals. Consisteix en dibuixar, per a cada interval, un rectangle de base aquest interval de manera que la seva àrea sigui igual a la seva freqüència absoluta.

Exemple 9. Vegem-ho amb un exemple. Suposem que feim una enquesta sobre l'edat de les persones, la qual està recollida a la taula 5.

Potser volguem agrupar les edats segons les *generacions* de les persones: (a.) primera edat, de $[0, 25)$, (b.) segona edat, de $[25, 60)$, i (c.) tercera edat, de $[60, \infty)$, que correspondrien a la joventud, mitjana edat i vellesa. Noteu que la mida d'aquests intervals no és la mateixa.

Amb aquesta classificació, obtenim la taula següent:

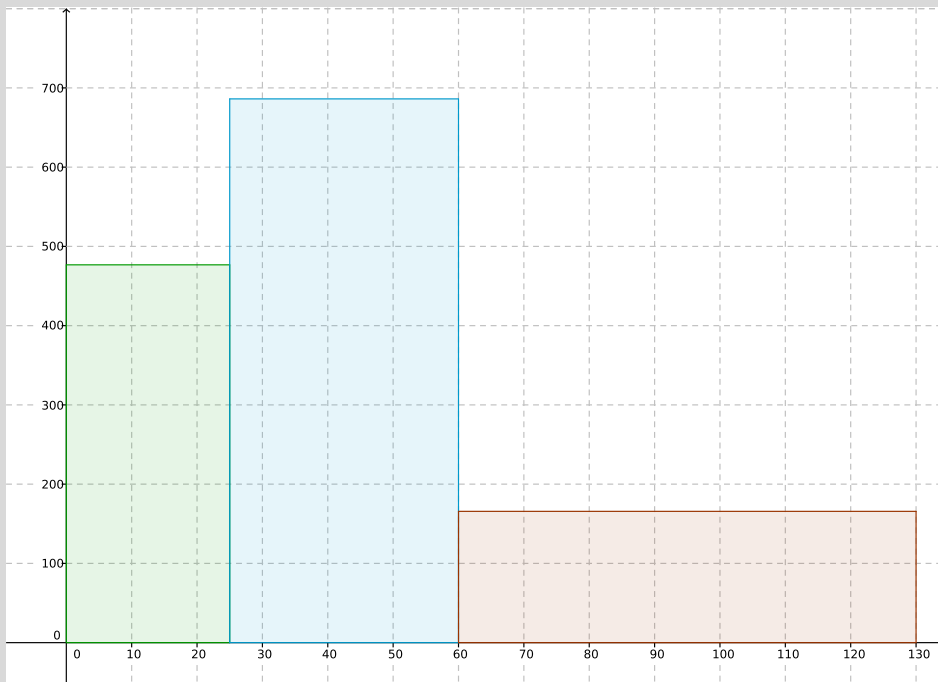
Intervals	Freqüència absoluta
$[0, 25)$	11.918,5
$[25, 60)$	24.014,5
$[60, \infty)$	10.762

Noteu que segons les dades (taula 5) no podem saber exactament quantes persones tenen entre 0 i 25 anys i quantes persones tenen entre 25 i 30. Per tant, el que hem fet és suposar que existeixen el mateix nombre de persones en ambdós grups: $5337/2 = 2668,5$.

Ara hauríem de fer un gràfic de manera que:

- Hi hagués un rectangle de base $[0, 25)$ (de mida 25) i d'àrea proporcional a 11.918,5. Quina altura ha de tenir?
Com que sabem que $A = b \cdot h$, aleshores $11.918,5 = 25 \cdot h$. Per tant, l'altura del rectangle ha de ser $h = 11.918,5/25 = 476,74$.
- El segon rectangle ha de tenir base igual a $[25, 60)$ (mida 35) i la seva àrea ha de ser proporcional a 24.014,5. Per tant, la seva altura ha de ser $h = A/b = 24.014,5/35 \simeq 686,13$.
- Finalment el darrer rectangle, que podem suposar de base $[60, 130)$ (mida 65) tindrà una altura de $A/b = 10.762/65 \simeq 165,67$.

Amb tota aquesta informació, el gràfic queda de la manera següent (figura 15):



Taula 15 Histograma de freqüències dels grups d'edats

Normalment els intervals estan agrupats de forma que tenen la mateixa mida i per això sovint s'acostuma a confondre l'histograma amb el diagrama de freqüències, ja que l'histograma queda reduït a dibuixar rectangles d'altura proporcional a la freqüència absoluta de l'interval (la base és la mateixa). Aquesta confusió és clarament un error.

Exercici 360. El nombre d'hores de telèfon per individu d'una població de l'Estat espanyol han estat els següents:

Intervals	Freqüència absoluta
[0, 5)	10
[5, 10)	40
[10, 15)	55
[20, 25)	50
[25, 35)	20
[35, 60)	25

- Calculeu les freqüències relatives i es freqüències acumulades
- Dibuixeu l'histograma de freqüències
- Trobeu la mitjana aritmètica
- Calculeu la desviació típica
- Obteniu el coeficient de variació. Segons això, la dispersió de la mostra és molt gran?
- Calculeu l'interval $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ i digueu quin tant per cent de les dades hi ha a aquest interval. Comenteu el resultat obtingut.

Exercici 361. El nombre de ous eclosionats per individu d'una espècie de granota han estat els següents:

Intervals	Freqüència absoluta
[20, 30)	5
[30, 40)	10
[40, 50)	25
[50, 60)	30
[60, 80)	15
[80, 100)	10

Calculeu:

- Les freqüències relatives
- Les freqüències acumulades
- La marca de classe de cada interval
- Dibuixa l'histograma de freqüències
- Mitjana aritmètica
- Variança i la desviació típica

- g. El coeficient de variació. Segons això, la dispersió de la mostra és molt gran?
- h. L'interval $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ i digueu quin tant per cent de les dades hi ha a aquest interval. Comenteu el resultat obtingut.

Exercici 362. El nombre de persones que va entrar a la botiga “Ca’n Salat” el juny del 2005 varen ser:

2, 4, 0, 5, 6, 47, 43, 28, 50, 14,
 4, 6, 9, 5, 16, 2, 5, 3, 8, 5,
 25, 6, 19, 13, 28, 48, 35, 58, 13, 9.

- a. Agrupeu les dades en interval d'amplitud 10
- b. Calculeu \bar{x} , Me , Mo
- c. Feis l'histograma de freqüències

Exercici 363. Les alçades de 30 persones collides a l'atzar són:

156, 154, 165, 168, 174, 145, 169, 168, 162, 170
 172, 180, 176, 178, 177, 156, 189, 164, 174, 180
 160, 186, 175, 173, 175, 172, 180, 179, 178, 177

- a. Agrupeu les dades amb interval d'ammplitud 10
- b. Calculeu la desviació mitjana i el coeficient de variació
- c. Representeu les dades en un histograma

